Première approche de la loi binomiale

Définition:
Une expérience à deux issues, succès ou échec, est appelée « épreuve de Bernoulli ».

Exercice 1:
Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser leur paramètre (si ce n'est pas clairement indiqué, vous choisirez quelle issue correspond au succès et quelle issue correspond à l'échec).

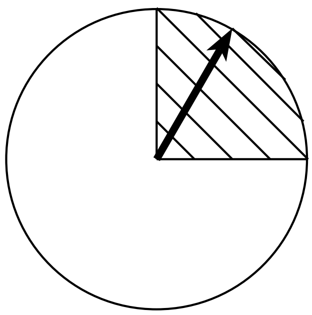
1. On lance un dé équilibré et on gagne si on fait un 6.
2. On lance un dé tétraèdrique et on regarde le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 qu'il soit vert.
4. On tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges. On gagne si elle est noire.

Exercice 2:
On considère l'épreuve aléatoire : « on tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges » et on s'intéresse à la sortie d'une boule rouge.

1. L'expérience aléatoire suivante est-elle une épreuve de Bernoulli ?
2. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Définition:
La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, où p désigne la probabilité du succès. Son espérance est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1 - p)$

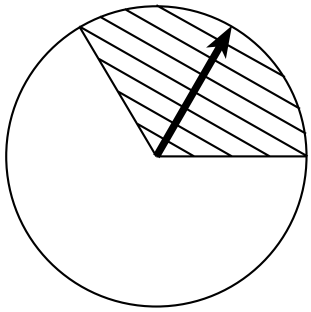
Exercice 3:



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-dessus : on obtient la zone grisée avec la probabilité $0,25$ et la zone blanche avec la probabilité $0,75$. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone grisée. On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire.
On joue trois fois de suite dans des conditions identiques et on désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus.

1. Réaliser un arbre pondéré représentant cette situation.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins deux succès.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un échec.
6. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4:



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-dessus : on obtient la zone grisée avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et la zone blanche avec la probabilité $1 - p$. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone grisée. On décide de noter S (comme succès) cette éventualité et de noter E (comme échec) l'éventualité contraire.

1. On répète quatre fois cette épreuve de Bernoulli de paramètre p. Réaliser un arbre pondéré représentant cette situation.
2. On définit alors la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus à l'issue des quatre répétitions.
   a. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$.
   b. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
3. On répète cinq fois cette épreuve de Bernoulli de paramètre p. On note toujours X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus à l'issue des cinq répétitions.
   a. Déterminer la probabilité des événements $\{X = 0\}$ et $\{X = 5\}$
   b. On note $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on lit « 2 parmi 5 » le nombre de chemins conduisant à 2 succès. Déterminer ce nombre.
   c. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Définition:
On répète n fois la même expérience de Bernoulli de manière ***indépendante****, on obtient un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.*

Définition:
Le ***nombre de chemins*** *de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.*

Exercice 5:
A l'aide de votre calculatrice, déterminer $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6:
Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de votre calculatrice :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Théorème:
Si $0 \leq k \leq n$ alors $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ où $n! = n \times (n-1)...2 \times 1$ et $0! = 1$.

Exercice 7:
Déterminer 1!, 2!, 3!, 4! et 7!

Exercice 8:
A l'aide de la formule ci-dessus :

1. Déterminer le nombre de chemins conduisant à 4 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 6 ;
2. Déterminer le nombre de chemins conduisant à 5 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 6.