Chapitre 7: Loi binomiale

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Exemple:
Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée ; il gagne 2 euros par « pile »obtenu et perd 1 euro par « face »obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P \ ; \ 1F1P \ \ 2F\}$ et la loi de probabilité :

Issue	$2P$	$1F1P$	$2F$
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

*On définit une fonction X sur Ω qui, à chaque issue, associe le gain algébrique correspondant du joueur. Une telle fonction est appelée **variable aléatoire** sur Ω. La variable aléatoire X associe aux issues $2P$, $1F1P$ et $2F$ les réels respectifs 4, 1 et -2.*
On note $P(X=4)$ la probabilité que le gain soit égal à 4 c'est à dire la probabilité que le résultat soit $2P$ soit $P(X=4) = P(2P) = \frac{1}{4}$.

Définition:
- *Définir une variable aléatoire X sur Ω c'est associer un réel à chaque issue de Ω.*
- *Si $\{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_r\}$ sont les valeurs prises par X sur Ω alors :*
  - *l'événement « X prend la valeur x_i »est noté « $X = x_i$ » ;*
  - *sa probabilité $P(X = x_i)$ est la probabilité de l'ensemble des issues ayant x_i pour image par X ;*
  - *on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X soit $X(\Omega) = \{x_1 \ ; \ x_2 \ ; \ ... \ ; \ x_r\}$.*

Définition:
Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est :
- *préciser l'ensemble des valeurs $X(\Omega) = \{x_1 \ ; \ ... \ ; \ x_r\}$ prises par X ;*
- *calculer, pour chaque valeur x_i, la probabilité $P(X = x_i)$.*

Exemple:
Dans l'exemple précédent, $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$ et la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 Espérance, variance et écart-type

Définition:
Soit X une variable aléatoire, de loi de probabilité donnée par :

x_i	x_1	x_2	...	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_r

- *L'espérance de X est le réel $E(X)$ défini par*

$$E(X) = p_1x_1 + ... + p_rx_r = \sum_{i=1}^{r} p_ix_i.$$

- *La variance de X est le réel $V(X)$ défini par*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} p_ix_i^2\right) - (E(X))^2.$$

- *L'écart-type de X est le réel $\sigma(X)$ défini par*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a :

- $E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_ix_i = \frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 4 = 1.$
- $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{3} p_ix_i^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{4} \times (-2)^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 4^2 - 1^2 = 4,5.$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 2,1.$

3 Loi de Bernoulli

Définition:
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec $(\overline{S})$ avec $P(S) = p$ et $P\left(\overline{S}\right) = 1 - p$.

Exemple:
L'épreuve aléatoire : « on lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3 »est une épreuve de Bernoulli de paramètre la probabilité du succès « obtenir un multiple de 3 »soit $p = P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété:
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit X la v.a qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X est :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

L'espérance est $E(X) = p$ et la variance est $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$. On dit que la variable aléatoire X suit ***loi de Bernoulli de paramètre*** *p.*

4 Loi binomiale et coefficients binomiaux

Définition:
Lorsqu'on répète n fois la même expérience de Bernoulli de manière ***indépendante****, on obtient un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.*

Définition:
Le ***nombre de chemins*** *de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et se lit « k parmi n ». Les nombres $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.*

Exemple:
Le nombre de chemins qui mènent à 2 succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 10 est $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45$ d'après la calculatrice.

Définition:
Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X associant à chaque issue le nombre de succès a pour loi de probabilité :

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

On dit que X suit une ***loi binomiale de paramètre*** *n* ***et*** *p. On note X suit $\mathcal{B}(n; p)$.*

Exemple:
On répète 10 fois l'expérience précédente : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.
La variable aléatoire X donnant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.
On en déduit donc que la probabilité d'obtenir exactement 2 fois des nombres multiples de 3 lors de ces 10 lancers (c'est à dire la probabilité d'obtenir exactement 2 succès) est :

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^8 = 45 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \simeq 0{,}20.$$

Propriété:
Soit une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.On a :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$