Introduction à la notion de variable aléatoire

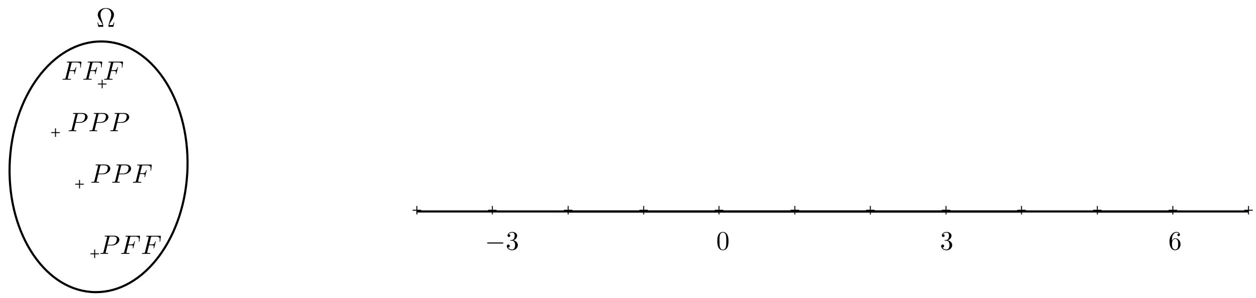
Exercice 1:
Un joueur lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On s'intéresse aux résultats obtenues sans prendre l'ordre en compte. Par exemple « PPF »correspond à deux fois pile et un fois face.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire en complétant le tableau ci-dessous :

issue	PPP	PPF	PFF	FFF
probabilité				

Le joueur gagne 2 euros par « pile » obtenu et perd 1 euro par « face » obtenu. On définit alors une fonction X sur Ω qui, à chaque issue, associe le gain algébrique correspondant du joueur.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par cette fonction X. On le note $X(\Omega)$.
4. Compléter le schéma ci-dessous :



- Une telle fonction est appelée **variable aléatoire** sur Ω.
- La variable aléatoire X associe aux issues FFF, FFP, FPP et PPP les réels respectifs -3, 0, 3 et 6.

5. Déterminer la probabilité que le gain soit égal à 6 notée $P(X = 6)$.
6. Compléter le tableau ci-dessous :

x_i	-3	0	3	6
$P(X = x_i)$				

Ce tableau donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le réel $E(X)$ défini par $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + ... + x_4 \times P(X = x_4)$

7. Déterminer $E(X)$.

Exercice 2:
Une roue de loterie est formée de 4 secteurs A, B, C et D dont les mesures en degrés sont :

secteur A : 180 ° secteur B : 90 ° secteur C : 60 ° secteur D : 30 °

1. Déterminer un univers Ω et une loi de probabilité associée.
2. À chaque issue, on associe le gain algébrique en euros (positif ou négatif) du joueur suivant la règle :

secteur A : -4 euros
secteur B : -1 euro
secteur C : 0 euro
secteur D : $+12$ euros

Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

3. Dans cette question, s désigne la somme attribuée au secteur C, les autres restant inchangées. Quelle valeur faut-il attribuer à s pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 3:
On se donne :

- une urne contenant quatre boules indistinguables au toucher dont trois boules bleues, notées $B1$, $B2$ et $B3$, portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, et une boule rouge unique, notée R.
- un jeu de six cartes identiques portant chacune un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre « 1 » en vert, une carte avec un chiffre « 2 » en rouge, une carte avec un chiffre « 2 » en bleu, une carte avec un chiffre « 2 » en vert, une carte avec un chiffre « 3 » en rouge et une carte avec un chiffre « 3 » en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte.

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

   On considère le jeu suivant :

   - Dans un premier temps, si la couleur de la boule est bleu, le gain potentiel est de 90 euros. Sinon il est de 60 euros ;
   - Dans un deuxième temps, on divise ce gain potentiel par le chiffre indiqué sur la carte : le résultat obtenu est le gain final du jeu.

   On appelle X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.
4. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 4:
L'expérience consiste à lancer deux dés tétraédriques équilibrés et à écrire à partir du couple $(a; b)$ obtenu, formé des numéros des faces, l'équation $ax^2 + bx + 1 = 0$.

1. Combien d'équations différentes peut-on former ainsi ?
2. On désigne par X la variable aléatoire associant à l'équation obtenue le nombre de ses solutions réels. Déterminer la loi de probabilité de X.