Fibonacci ¹

La suite de Fibonacci est une suite de nombre qui permet de répondre au problème suivant :

Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?

Ce problème est donc à l'origine de la suite dont le terme numéro n correspond au nombre de paires de lapins au mois numéro n . Dans cette population (idéale), on suppose que :

- au (début du) premier mois, il y a juste une paire de lapereaux ;
- les lapereaux ne procréent qu'à partir du (début du) troisième mois ;
- chaque (début de) mois, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais.

1. Déterminer les vingt premiers termes de la suite de Fibonacci.

On dit qu'on a défini une suite de nombre noté (u_n) avec :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Cette suite de nombre est définie par récurrence. Pour connaître le terme numéro $\boxed{n+2}$ de la suite de Fibonacci (qu'on note u_{n+2}), il faut connaître le terme numéro $\boxed{n+1}$ de la suite de Fibonacci (qu'on note u_{n+1}) et le terme numéro $\boxed{n}$ de la suite de Fibonacci (qu'on note u_n).

2. A l'aide du logiciel Calc de la suite LibreOffice, calculer les 200 premiers termes de la suite de Fibonacci.
3. A l'aide du logiciel Algobox, écrire un algorithme qui permet de calculer autant de termes de la suite de Fibonacci que l'on veut.
4. Résoudre l'équation du second degré $x^2 = x + 1$.
5. Observer à l'aide du logiciel Algobox que :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

6. Calculer à la main les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = -2n^3 + 4n - 1$ puis à l'aide du logiciel Calc de la suite LibreOffice, calculer les 100 premiers termes de cette suite.
7. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 0 + 1 + \dots + n$
 - a. Déterminer à la main les dix premiers termes de la suite (u_n) .
 - b. A l'aide du logiciel Calc de la suite LibreOffice, calculer les 100 premiers termes de cette suite.
 - c. Observer que u_n peut être définie par $\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien.