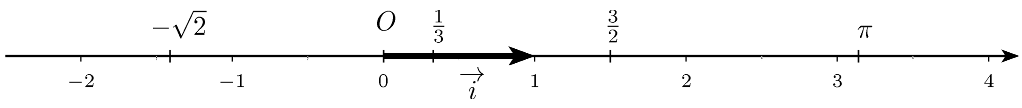
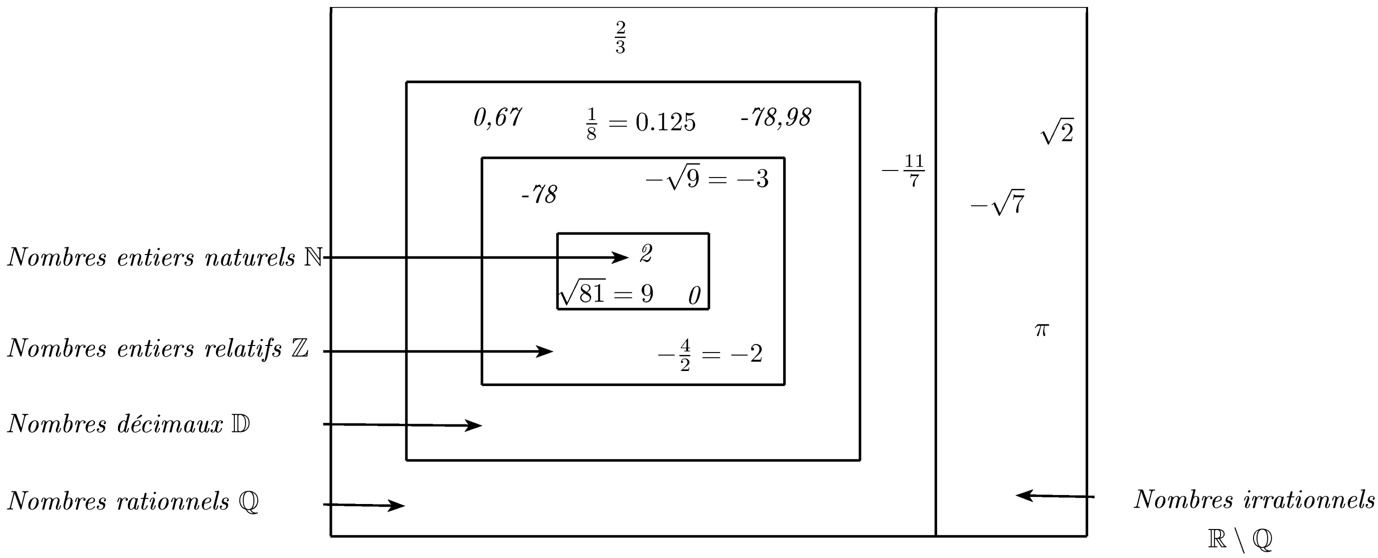
Chapitre 1: Généralités sur les fonctions

1 Les nombres réels

Définition:
*On considère une droite graduée d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{i}$. Les nombres réels sont les abscisses de tous les points de la droite graduée. L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.*



Remarque:
L'ensemble des nombres réels contient tous les nombres entiers, décimaux, rationnels et irrationnels vus en troisième.



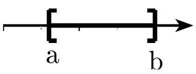
On rappelle les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

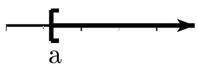
2 Intervalles

Définitions :

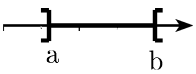
- L'intervalle fermé $[a;b]$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.



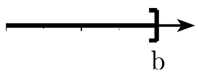
- L'intervalle $[a;+\infty[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a \leq x$.



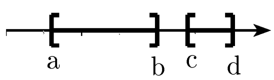
- L'intervalle ouvert $]a;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $a < x < b$.



- L'intervalle $]-\infty;b[$ est l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $x \leq b$.



Remarques:
- *On peut définir de même les intervalles $]a;b]$,$[a;b[$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;b[$.*
- *La réunion des intervalles disjoints $[a;b]$ et $[c;d]$ ci-contre se note : $[a;b] \cup [c;d]$, le symbole $\cup$ se lit "union".*



3 Les fonctions

Dans cette partie, D est intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

a) Définition, image et antécédent

Définition:
On définit une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque nombre x de D un unique nombre réel noté $f(x)$. On note cette fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Vocabulaire:
- *D est l'**ensemble de définition** de f. On dit que f est définie sur D.*
- *Le nombre $f(x)$ est appelé **image de x par f**.*

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$.
- *$]-2;+\infty[$ est l'ensemble de définition de f.*
- $$\begin{aligned} f(-1) &= \tfrac{3\times(-1)}{-1+2} \\ &= \tfrac{-3}{1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

  L'image du nombre -1 par la fonction f est -3, ce qui se note $f(-1) = -3$.
- *On dit aussi que -3 est un **antécédent** du nombre -1 par la fonction f.*

Définition:
Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.
*Si un nombre k est l'image d'un nombre x, c'est à dire si $f(x) = k$, alors on dit que x **est un antécédent de** k.*

Remarque:
Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. On a :

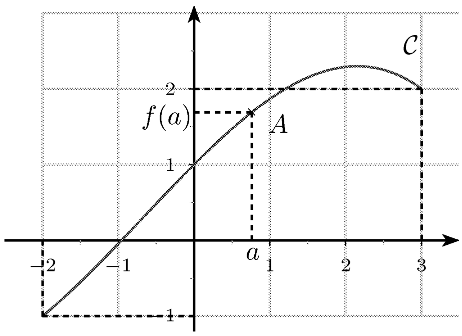
$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \quad \textit{et} \quad f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

-1 et 1 sont deux antécédents de 0 par la fonction f.

b) Représentation graphique

Définition:
f est une fonction définie sur D.
*La **représentation graphique** $\mathcal{C}$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un nombre de D.*

Exemple:
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $D = [-2; 3]$. Le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$.



Attention :
Une lecture graphique ne donne que des valeurs approchées des images et antécédents recherchés sauf lorsque le codage indique la valeur exacte. Dans l'exemple ci-dessus, on a $f(-2) = -1$ et $f(3) = 2$ mais $f(-1) \simeq 0$.

Définition:
Soit M un point de coordonnées $(a; b)$ avec $a \in D$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère :
- Si $b = f(a)$, c'est à dire si $M(a; f(a))$, alors M appartient à $\mathcal{C}$, sinon M n'appartient pas à $\mathcal{C}$.
- On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f(x)$

4 Inéquations de la forme $f(x) < k$ et $f(x) < g(x)$

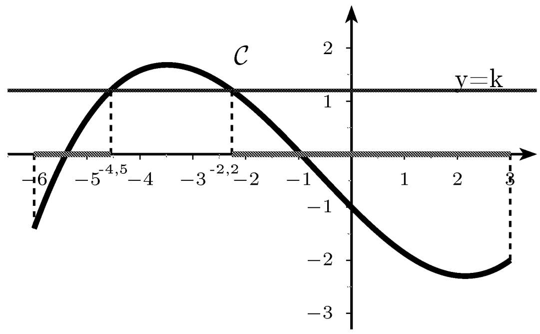
Soit f une fonction définie sur $D = [-6; 3]$ dont on donne la représentation graphique dans le repère ci-contre :

Résoudre l'inéquation $f(x) < k$ c'est chercher les nombres x de D qui ont une image inférieure strictement à k.

Ici $f(x) < k$ pour $x \in [-6; -4,5[$ ou $x \in]-2,2; 3]$.

On dit que : $f(x) < k$ admet pour ensemble solution :

$$\mathcal{S} = [-6; -4,5[\cup]-2,2; 3]$$



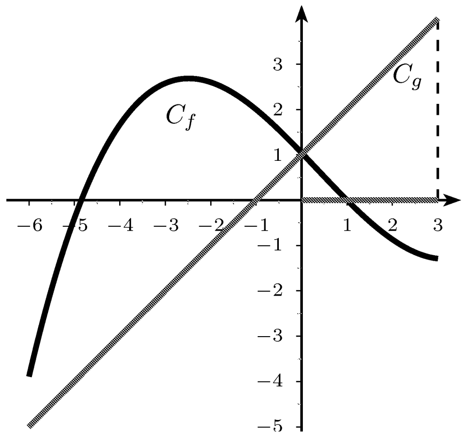
Soit f et g deux fonctions définies sur $D = [-6; 3]$ dont on donne les représentation graphique dans le repère ci-contre :

Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$ c'est chercher les nombres x de D dont l'image par la fonction f est inférieure strictement à l'image par la fonction g.

Ici $f(x) < g(x)$ pour $x \in]0; 3]$.

On dit que : $f(x) < g(x)$ admet pour ensemble solution :

$$\mathcal{S} =]0; 3]$$



Remarque:
On peut résoudre de même les inéquations de la forme :

$$f(x) > k \quad ; \quad f(x) \geq k \quad ; \quad f(x) \leq k \quad ; \quad f(x) > g(x) \quad ; \quad f(x) \geq g(x) \quad ; \quad f(x) \leq g(x)$$

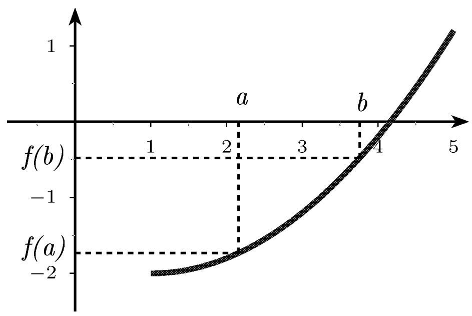
5 Variations

a) Définition

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est strictement croissante (resp. croissante) sur I si pour tous nombres a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, on a :

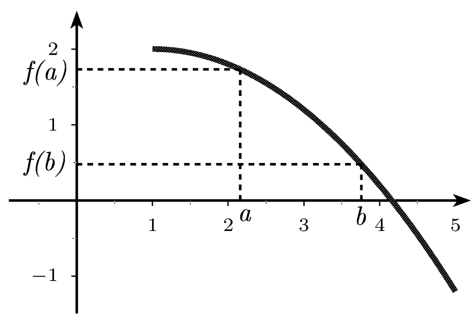
$$f(a) < f(b) \text{ (resp. } f(a) \leq f(b))$$



La fonction f représenté ci-dessus est strictement croissante sur $[1; 5]$. On observe que la courbe "monte".

f est strictement décroissante (resp. décroissante) sur I si pour tous nombres a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, on a :

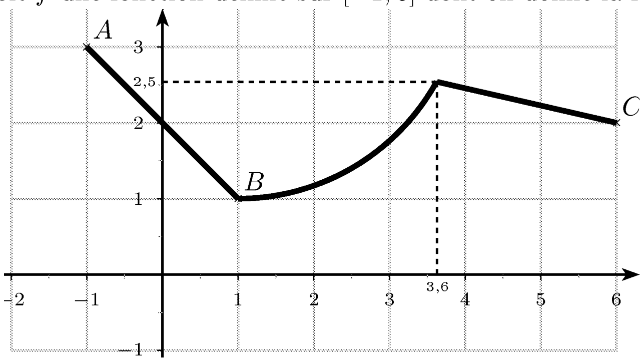
$$f(a) > f(b) \text{ (resp. } f(a) \geq f(b))$$



La fonction g représenté ci-dessus est strictement décroissante sur $[1; 5]$. On observe que la courbe "descend".

b) Tableau de variation

Soit f une fonction définie sur $[-1;6]$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous :



Le tableau de variations de la fonction f est :

x	-1		1		$3,6$		6
$f(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$2,5$	$\searrow$	2

La lecture du tableau montre que 3 est la plus grande valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $[-1;6]$. On dit que 3 est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-1;6]$ et qu'il est atteint lorsque $x=-1$.
Le point $A(-1;3)$ est le plus haut de la courbe.

De même, la lecture du tableau montre que 1 est la plus petite valeur prise par la fonction f sur l'intervalle $[-1;6]$. On dit que 1 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-1;6]$ et qu'il est atteint lorsque $x=1$.
Le point $B(1;1)$ est le plus bas de la courbe.

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I.

- m est le minimum de f sur I si m est la plus grande valeur tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

- M est le maximum de f sur I si M est la plus petite valeur tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.

- Le minimum (resp.maximum) est atteint s'il existe $a \in I$ tel que $f(a)=m$ (resp. $f(a)=M$).

Remarque:
La fonction f définie sur $]1;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous admet 2 pour maximum mais elle ne l'atteint jamais !!