Chapitre 5: Fonctions polynômes

1 Fonction carré

Définition:
La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

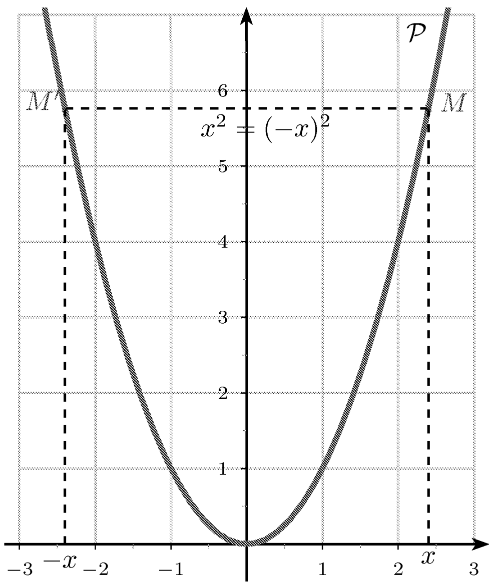
$$f : x \longmapsto x^2$$

Théorème:
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Remarques:
- 0 *est le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, il est atteint pour $x = 0$*
- *Pour tout nombre réel x, $f(x) \geq 0$. On dit que la fonction carré est positive.*

Propriété:
La représentation graphique de la fonction carré est une parabole.

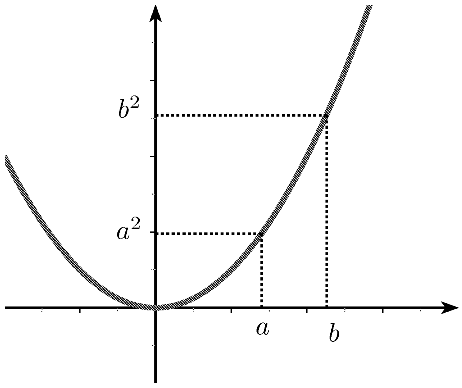


Remarques:
- *L'origine O est le sommet de cette parabole.*
- *Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Cet axe est un axe de symétrie de la parabole.*

Théorème:

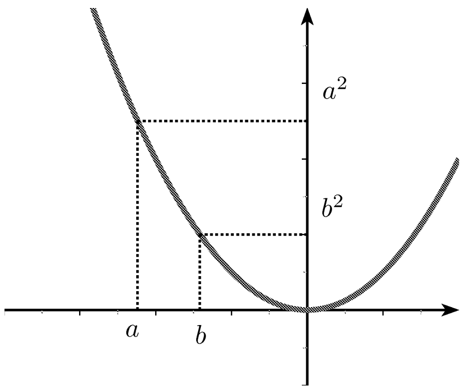
- *Pour tous nombres réels positifs a et b :*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$



- *Pour tous nombres réels négatifs a et b :*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$



Remarque:
Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "équivaut à".

2 Fonctions polynômes du second degré

2.1 Définition

Définition:
On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.

Remarque:
Les fonctions polynôme du second degré sont aussi appelées trinôme du second degré.

Exemples:

- $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$ *est un trinôme du second degré avec* $a = 5$, $b = 4$ *et* $c = -3$.
- $g(x) = -3(x-4)(x+5)$ *est un trinôme du second degré avec* $a = -3$, $b = -3$ *et* $c = 60$ *puisque :*

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & -3(x-4)(x+5) \\ & = & (-3x+12)(x+5) \\ & = & -3x^2 - 15x + 12x + 60 \\ & = & -3x^2 - 3x + 60 \end{array}$$

2.2 Courbes représentatives et sens de variation

Propriété:
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- *Si $a > 0$ alors la représentation graphique de la fonction f est une parabole ayant "les branches tournées vers le haut" et f admet le tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	

- *Si $a < 0$ alors la représentation graphique de la fonction f est une parabole ayant "les branches tournées vers le bas" et f admet le tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$	

Remarque:
Dans un repère orthogonal, la droite d'équation $x = \dfrac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.