

Fonctions homographiques

Définition:

On appelle fonction homographique toute fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2-5x}$, g la fonction définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{3x-7}$ et h la fonction définie par $h(x) = x - 1 - \frac{2x^2}{2x+3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ses fonctions.
2. Montrer que ces trois fonctions sont des fonctions homographiques.
3. Tracer à l'aide de votre calculatrice la représentation graphique de ces trois fonctions.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer la nature de la fonction f .
3. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction f .
4. Déterminer le signe de la fonction f .
5. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $f(x) = 2$.
6. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $f(x) < -1$.
7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x - 1$.
 - a. Résoudre l'équation $f(x) + 2x + 1 = 0$.
 - b. Interpréter graphiquement les solutions de cette équation.
 - c. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Exercice 3:

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x-3}{2x-3}$$

et h la fonction définie par

$$h(x) = \frac{-2x+6}{x-2}$$

1. Étude de la fonction g :
 - a. Déterminer le domaine de définition de g .
 - b. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction g .
 - c. Déterminer le signe de la fonction g .
 - d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $g(x) = -1$.
 - e. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $g(x) < 2$.
2. Étude de la fonction h :
 - a. Déterminer le domaine de définition de h .
 - b. Tracer dans le même repère la représentation graphique de la fonction h .
 - c. Déterminer le signe de la fonction h .
 - d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $h(x) = -1$.
 - e. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $h(x) > -3$.
3. Étude des positions relatives des courbes des deux fonctions :
 - a. Montrer que pour tout réel x ,

$$5(x-3)\left(x - \frac{8}{5}\right) = 5x^2 - 23x + 24$$

- b. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $h(x) = g(x)$.
- c. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $h(x) \leq g(x)$.