Éléments de réponse

- La simulation de 1000 lancers de trois dés ne permet pas d'affirmer que le Duc de Toscane a vu juste. En effet, des élèves obtiennent plus de 9 que de 10 mais la majorité des élèves obtiennent plus de 10 que de 9.
- La simulation de 100 000 lancers de trois dés permet d'affirmer que le Duc de Toscane semble avoir vu juste. En effet, tous les élèves obtiennent plus de 10 que de 9.
- Pour comprendre ces résultats, il faut modéliser l'expérience réalisée. Lorsque l'on jette trois dés, on obtient $6^3 = 216$ combinaisons de trois chiffres de la forme $(1; 4; 5)$ où 1 est le résultat du premier dé, 4 est le résultat du second dé et 5 est le résultat du troisième dé. L'erreur de raisonnement du Duc de Toscane est la suivante :

→ $1 + 2 + 6$ peut être obtenu de 6 façons différentes :

$$(1; 2; 6); (1; 6; 2); (2; 1; 6); (2; 6; 1); (6; 1; 2); (6; 2; 1)$$

→ $1 + 4 + 4$ peut être obtenu de 3 façons différentes :

$$(1; 4; 4); (4; 1; 4); (4; 4; 1)$$

→ $3 + 3 + 3$ peut être obtenu d'une unique façon :

$$(3; 3; 3)$$

En reprenant les décompositions du départ :

$$\rightarrow 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$

$$\rightarrow 10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$$

on obtient qu'il y a 25 façons d'obtenir 9 et 27 façons d'obtenir 10 donc la probabilité d'apparition du 9 est

$$p = \frac{25}{216}$$

et la probabilité d'apparition du 10 est

$$p = \frac{27}{216}$$

- Pour ce qui est des questions supplémentaires, on obtient pour 1000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216} - \frac{1}{\sqrt{1000}}; \frac{25}{216} + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,0841; 0,1474]$$

et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216} - \frac{1}{\sqrt{1000}}; \frac{27}{216} + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,0934; 0,1566]$$

Ces deux intervalles ont une intersection commune donc il était possible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la première simulation.

- Pour 100 000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216} - \frac{1}{\sqrt{100\,000}}; \frac{25}{216} + \frac{1}{\sqrt{100\,000}} \right] = [0,1126; 0,1189]$$

et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216} - \frac{1}{\sqrt{100\,000}}; \frac{27}{216} + \frac{1}{\sqrt{100\,000}} \right] = [0,1218; 0,1282]$$

Ces deux intervalles n'ont pas d'intersection commune donc il était impossible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la seconde simulation.