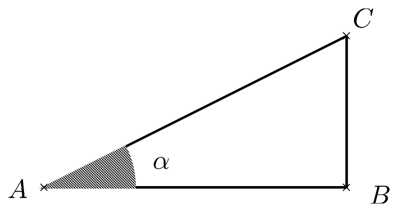
Chapitre 12: Trigonométrie

1 Rappels



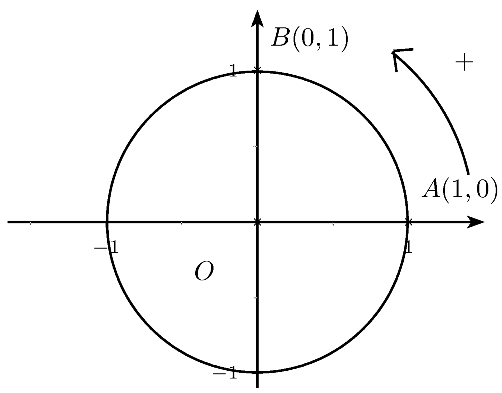
On considère un triangle ABC rectangle en B et on note α la mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{BAC}$. On a alors :

$$cos\alpha = \frac{AB}{AC} \quad et \quad sin\alpha = \frac{BC}{AC}$$

2 Le cercle trigonométrique

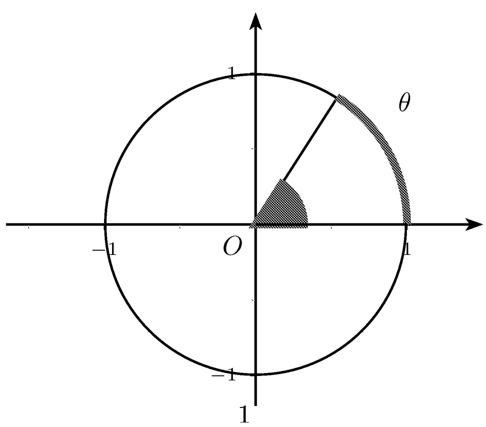
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition:
le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1, sur lequel on choisit un sens de parcours appelé le sens direct.



Ce cercle $\mathcal{C}$ a pour périmètre 2π.

Définition:
Le radian est l'unité de mesure d'angle définie de la manière suivante :
Un angle de sommet O mesure θ radians lorsque la longueur de l'arc de $\mathcal{C}$ qu'il intercepte est θ.



Les mesures des angles en degrés et en radians sont proportionnelles. Le périmètre du cercle $\mathcal{C}$ est de 2π donc un angle de 360 degrés mesure 2π radians.

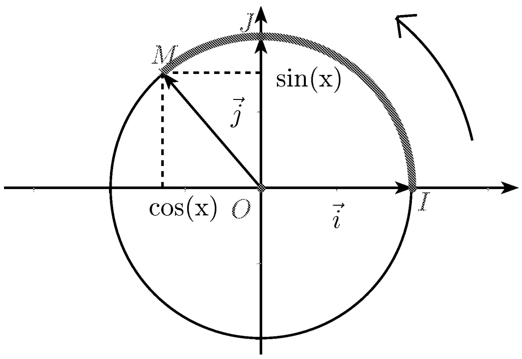
Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radian							

3 Cosinus et sinus d'un nombre

On va maintenant définir le cosinus et le sinus de n'importe quel angle en radians. Pour cela, on établit une correspondance entre l'ensemble $\mathbb{R}$ et les points du cercle trigonométrique.

3.1 Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.



Soit $x \in \mathbb{R}$. En partant de I et en se placent sur $\mathcal{C}$, on parcourt un chemin de longueur $|x|$ en tournant :

- dans le sens positif si $x > 0$;
- dans le sens négatif si $x < 0$.

On aboutit ainsi à un point M de $\mathcal{C}$, associé de manière unique à x. On définit ainsi la fonction :

$$M : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ x & \longmapsto & M(x) \end{cases}$$

Définition:
Le cosinus de x, noté cos, est l'abscisse de $M(x)$ dans le repère.
Le sinus de x, noté sin, est l'ordonnée de $M(x)$ dans le repère.

Exemple:
Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient cos $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et sin $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

3.2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure de l'angle en degré							
$cos(x)$							
$sin(x)$							

3.3 Propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$M(x) = M(x + 2\pi)$$

on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$cos(x) = cos(x + 2\pi) \qquad et \qquad sin(x) = sin(x + 2\pi)$$

De plus, comme $M(x)$ appartient au cercle trigonométrique,

$$-1 \leq cos(x) \leq 1 \qquad et \qquad -1 \leq sin(x) \leq 1$$

Enfin, en appliquant le théorème de Pythagore,

$$(cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$$