

# Chapitre 2: Vecteurs

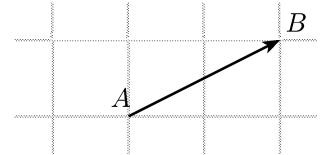
## 1 Notion de vecteur

### 1.1 Définition

**Définition:**

Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est caractérisé par :

- sa direction : celle de la droite  $(AB)$  et de toutes les droites parallèles à  $(AB)$  ;
- son sens : celui de  $A$  vers  $B$  ;
- sa longueur : la distance  $AB$  qu'on appelle aussi la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  noté  $\|\overrightarrow{AB}\|$ .



**Remarque:**

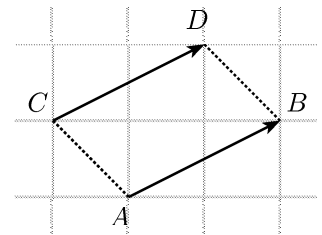
Si  $A = B$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$  s'appelle le vecteur nul et est noté  $\vec{0}$ .

Le vecteur n'a ni direction ni sens, sa longueur est égale à 0.

### 1.2 Égalité de deux vecteurs

**Définition:**

Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux si et seulement si  $D$  est l'image de  $C$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

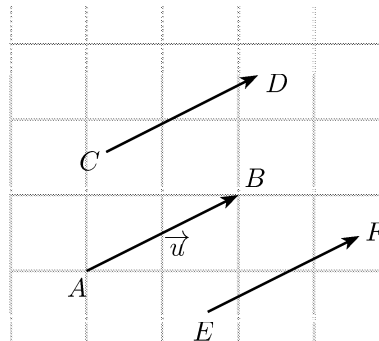


**Conséquences :**

- Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  non-nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme (qui peut-être aplati).

**Remarque:**

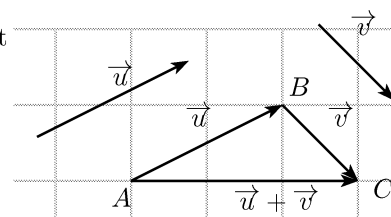
Soit  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  un vecteur non-nul du plan, on peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal au vecteur  $\vec{u}$ . On dit que le vecteur  $\vec{u}$  a une infinité de représentants !



## 2 Additions de vecteurs

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur noté  $\vec{u} + \vec{v}$  que l'on peut représenté de la manière suivante :

On choisit un point  $A$  quelconque, on place les points  $B$  et  $C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ , alors le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  représente le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ .



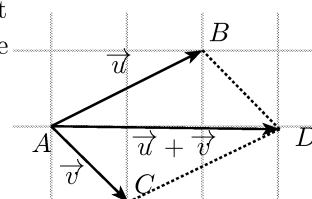
### Relation de Chasles :

Pour tous points  $A, B$  et  $C$  :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  peut aussi être représenté de la manière suivante :

On choisit un point  $A$  quelconque, on place les points  $B$  et  $C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ , alors le vecteur  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme éventuellement aplati.



### Règle du parallélogramme :

Pour tous points  $A, B$  et  $C$  :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

où  $D$  est tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme éventuellement aplati.

## 3 Produit d'un vecteur par un réel

### Définition:

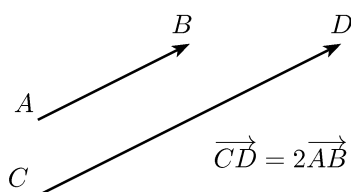
Soit  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur non-nul du plan et  $\lambda$  un nombre réel non-nul :

- Le vecteur  $\lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  a même direction que  $\overrightarrow{AB}$ , c'est à dire que  $(AB) \parallel (CD)$

si  $\lambda > 0$

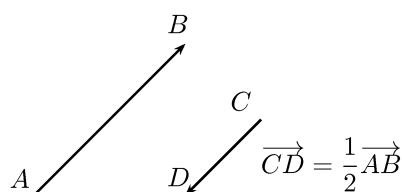
- $\overrightarrow{CD}$  a même sens que  $\overrightarrow{AB}$
- $CD = \lambda \times AB$

Exemples :



si  $\lambda < 0$

- $\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont de sens contraire
- $CD = -\lambda \times AB$



### Remarques:

- Si  $\lambda = 0$  ou si  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  alors  $\lambda \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .
- Si  $\lambda = -1$  :
  - On dit que  $\overrightarrow{AB}$  et  $-\overrightarrow{AB}$  sont opposés ;
  - Le vecteur qui a même longueur et même direction que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  mais qui a le sens opposés est le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  donc :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

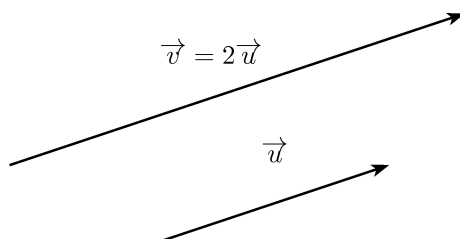
## 4 Vecteurs colinéaires

### Définition:

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

### Exemple:

$\vec{v} = 2\vec{u}$  donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.



### Remarque:

Le vecteur nul est donc colinéaire à tous les vecteurs.

### Propriété:

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont deux vecteurs non-nuls, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} (AB) \text{ et } (CD) & & \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} & & \text{il existe un} \\ \text{sont} & \Leftrightarrow & \text{sont} & \Leftrightarrow & \text{nombre } \lambda \text{ tel que} \\ \text{parallèles} & & \text{colinéaires} & & \vec{CD} = \lambda \vec{AB} \end{array}$$

### Propriété:

Trois points distincts du plan  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

### Preuve :

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés et distincts  $\Leftrightarrow (AB) \parallel (AC) \Leftrightarrow \vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires

## 5 Règles de calcul

### Propriété:

Pour tous réels  $\lambda$  et  $\beta$  et pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\lambda + \beta)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\lambda(\beta\vec{u}) = \lambda\beta\vec{u}$