

Chapitre 3: Fonctions affines

1 Définition d'une fonction affine

Définition:

a et b désignent deux nombres réels donnés.

Une fonction affine est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

Remarques:

- Pour $b = 0$, la fonction $x \mapsto ax + b$ devient $x \mapsto ax$, c'est une fonction **linéaire**.
- Pour $a = 0$, la fonction $x \mapsto ax + b$ devient $x \mapsto b$, c'est une fonction **constante**.

2 Représentation graphique

Propriété:

f est une fonction affine définie par $f : x \mapsto ax + b$ et on choisi un repère orthogonal alors la représentation graphique de la fonction affine f est une droite.

Remarques:

De plus, si on nomme (d) cette droite :

- La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.
- Le nombre b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite (d) .
- Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite (d) .
- La droite (d) a pour équation $y = ax + b$.

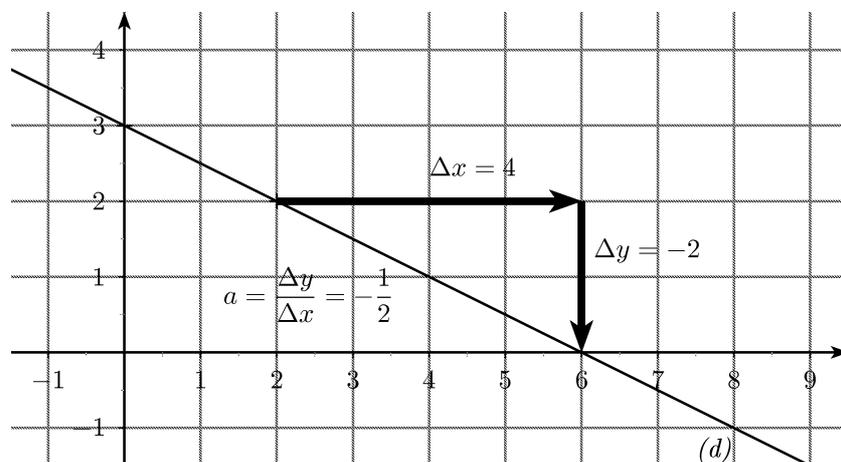
Exemple:

On considère la fonction affine $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$.

Sa représentation graphique est une droite (d) , d'ordonnée à l'origine 3 et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

Comme $f(0) = 3$ et $f(2) = 2$, la droite (d) passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(2; 2)$.

On dit que la droite (d) a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$.



On remarque que si l'accroissement des abscisses est $\Delta x = 4$ et si l'accroissement des ordonnées est $\Delta y = -2$ alors

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$

3 Proportionnalité des accroissements

Propriété:

a et b désignent des nombres réels et f est la fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

Pour deux nombres distincts x_1 et x_2 , on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Démonstration:

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$, on a : $f(x_1) = ax_1 + b$ et $f(x_2) = ax_2 + b$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} && \text{Puisque } x_2 - x_1 \neq 0 \\ &= a \end{aligned}$$

4 Sens de variation

Propriété:

f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

- Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- Si $a = 0$, f est constante sur \mathbb{R} .
- Si $a > 0$, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration:

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$ et f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

et comme $x_2 - x_1 > 0$ on en déduit que $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de a

- Si $a < 0$, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- Si $a = 0$, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, c'est à dire $f(x_1) = f(x_2)$ donc f est constante sur \mathbb{R} .
- Si $a > 0$, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

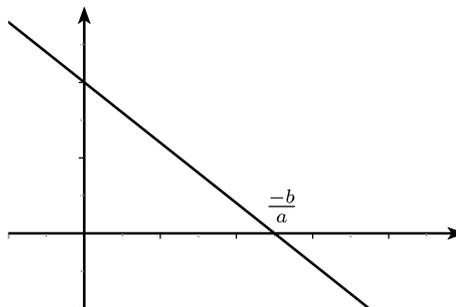
5 Signe d'une fonction affine

Propriété:

f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

- Si $a < 0$, f admet le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	0	$-$



- Si $a > 0$, f admet le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	0	$+$

