

## Étude de la fonction inverse

### 1) Définition et propriétés

La fonction inverse est la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction inverse.
2. Déterminer les images de  $-3$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{7}{5}$  et  $10$  par la fonction inverse.
3. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse.  
b. Montrer que pour tout réel  $x$  non-nul,  $f(-x) = -f(x)$ .  
c. En déduire que la représentation graphique de la fonction inverse admet un centre de symétrie.
4. Conjecturer les variations de la fonction inverse.

Pour démontrer ces conjectures, on considère deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et on va étudier le signe de  $f(a) - f(b)$ .

5. a. Factoriser  $f(a) - f(b)$ .  
b. Pour  $a$  et  $b$  deux réels strictement négatifs, montrer que si  $a < b$  alors  $f(a) > f(b)$ .  
c. Que peut-on en déduire?  
d. Pour  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs, montrer que si  $a < b$  alors  $f(a) > f(b)$ .  
e. Que peut-on en déduire?

### 2) Encadrement

1. Sans effectuer de calcul :  
a. Comparer les inverses de  $-2001$  et  $-2003$ .  
b. Comparer les inverses de  $0,001$  et  $0,1$ .
2. Recopier et compléter en justifiant au préalable votre réponse :  
a. Si  $x > 7$  alors  $\dots < \frac{1}{x} < \dots$   
b. Si  $x < -2$  alors  $\dots < \frac{1}{x} < \dots$
3. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :  
a. Si  $x > 4$  alors  $\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$   
b. Si  $x < -3$  alors  $\frac{1}{x} < -2$

### 3) Équations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse.  
b. Résoudre graphiquement les équations  $\frac{1}{x} = 1$ ;  $\frac{1}{x} = -1$  et  $\frac{1}{x} = 0$ .
2. Résoudre algébriquement les équations  $\frac{1}{x} = 1$ ;  $\frac{1}{x} = -67$  et  $\frac{1}{x} = 0$ .
3. Résoudre algébriquement l'équation  $\frac{1}{x} = a$  selon les valeurs prises par le nombre réel  $a$ .

### 4) Inéquations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse  
b. Résoudre graphiquement les inéquations  $\frac{1}{x} < 1$ ;  $\frac{1}{x} \geq -1$  et  $\frac{1}{x} > 2$ .
2. Résoudre algébriquement l'inéquation  $\frac{1}{x} \leq 10$ .
3. Résoudre algébriquement l'inéquation  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$ .