

# Chapitre 11: Probabilités

## 1 Vocabulaire des événements

On réalise les trois expériences suivantes :

|                                                                            |                                                                                              |                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure. | On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points sur sa face supérieure. | On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|

### Définition:

Dans chacune des expériences précédentes, chaque résultat possible est une **issue** de l'expérience. De plus, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. On dit donc que ces expériences sont **aléatoires**.

### Remarques:

- Une expérience aléatoire est uniquement due au **hasard**.
- Une expérience aléatoire peut-être réalisée autant de fois que l'on veut, dans les mêmes conditions.

### Définition:

L'ensemble  $\Omega$  de toutes les issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience.

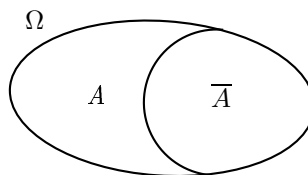
### Exemples:

Pour les trois expériences précédentes :

| La pièce de monnaie | Le dé à 6 faces                 | Le jeu de carte                        |
|---------------------|---------------------------------|----------------------------------------|
| $\Omega = \{P; F\}$ | $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ | $\Omega = \{7Co; 8Co; \dots; RT; 1T\}$ |

### Définition:

- Un **événement**  $A$  est une partie de l'univers  $\Omega$ .
- L'**événement contraire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est la partie de  $\Omega$  constituée de toutes les issues de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ .



- On dit que chaque issue qui est dans la partie  $A$  réalise l'événement  $A$ .
- Un **événement élémentaire** est une partie de  $\Omega$  qui ne contient qu'une seule issue.

### Exemples:

Pour les trois expériences précédentes :

| La pièce de monnaie                               | Le dé à 6 faces                                                                                                    | Le jeu de carte                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| « On obtient face » est un événement élémentaire. | « On obtient un 7 » est un événement qui n'est réalisé par aucune issue, on dit que c'est un événement impossible. | « On obtient un coeur » est un événement réalisé par huit issues. Son événement contraire, « On n'obtient pas un coeur » est lui réalisé par 24 issues. |

## 2 Probabilité d'un événement

On considère une expérience aléatoire d'univers  $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ . Pour modéliser l'expérience, on attribue à chacun des issues  $\{e_i\}$  un nombre positif noté  $p_i$ , qui est par définition sa probabilité. Et cela de telle sorte que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Pour estimer ces probabilités  $p_i$ , on procède selon les cas à des calculs, des simulations ou des sondages.

Parfois, la théorie assure a priori que les  $n$  événements ont tous la même probabilité, qui est alors égale à  $\frac{1}{n}$ . On dit alors que ces  $n$  événements sont **équiprobables**. Ainsi pour tout  $\{e_i\}$ ,

$$p_i = \frac{1}{n}$$

### Exemples:

Pour chacune des expériences initiales on a équiprobabilité :

| La pièce de monnaie                 | Le dé à 6 faces                                        | Le jeu de carte                                 |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $P(\{P\}) = P(\{F\}) = \frac{1}{2}$ | $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ | $P(\{7Co\}) = \dots = P(\{1T\}) = \frac{1}{32}$ |

### Définition:

La probabilité de l'événement  $A$ , notée  $P(A)$ , est la somme des probabilités des issues inclus dans  $A$ .

### Exemple:

Pour le lancer d'un dé équilibré ou non,  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Si  $A = \{3; 6\}$  alors  $P(A) = P(\{3\}) + P(\{6\})$

### Remarques:

- Pour tout événement  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- Pour l'ensemble qui ne contient aucun élément, appelé ensemble vide et noté  $\emptyset$ , on a  $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(\Omega) = 1$  donc pour tout événement  $A$ ,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \quad \text{donc} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

### Propriété:

Dans le cas où les issues sont équiprobables, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

### Exemple:

Pour le lancer d'un dé équilibré,  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Si  $A = \{3; 6\}$  alors

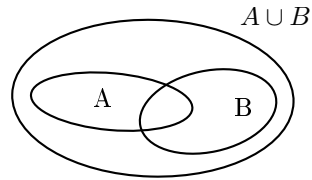
$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

### 3 Réunion et intersection

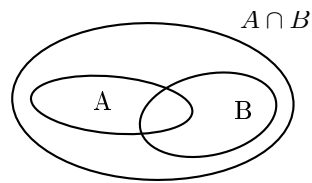
Pour le lancer d'un dé équilibré ou non,  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . On considère les deux événements suivants :

- $A$  est l'événement « sortie d'un nombre multiple de 3 » ;  $A = \{3; 6\}$ .
- $B$  est l'événement « sortie d'un nombre inférieur ou égal à 3 » ;  $B = \{1; 2; 3\}$ .

On définit la réunion de  $A$  et  $B$  comme l'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  ou  $B$  :  $A \cup B = \{1; 2; 3; 6\}$



On définit l'intersection de  $A$  et  $B$  comme l'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  et  $B$  :  $A \cap B = \{3\}$



**Théorème:**

Pour tous événements  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Remarque:**

Lorsque  $A$  et  $B$  n'ont pas d'issue en commun on dit qu'ils sont **incompatibles**. On a  $A \cap B = \emptyset$  et dans ce cas :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$