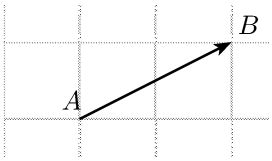
Chapitre 2: Vecteurs

1 Notion de vecteur

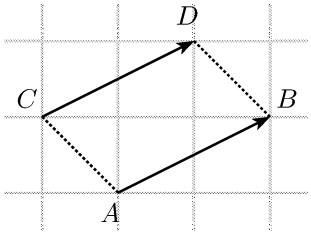
Définition:
Soit A et B deux points distincts du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- *sa direction : celle de la droite (AB) et de toutes les droites parallèles à (AB) ;*
- *son sens : de A vers B ;*
- *sa norme : la distance AB que l'on noté aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$.*



Remarque:
Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ s'appelle le vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$.
Le vecteur n'a ni direction ni sens, sa norme est égale à 0.

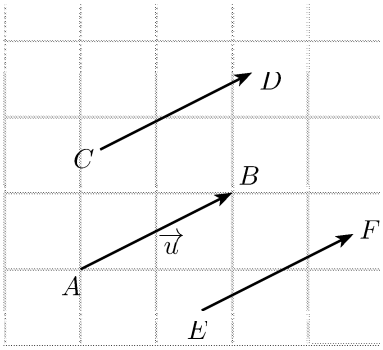
Définition:
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si
D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



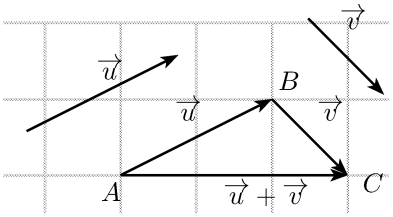
Conséquences :

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non-nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (qui peut-être aplati).

Remarque:
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan, on peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{u}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de représentants !



2 Additions de vecteurs



La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ que l'on peut représenté de la manière suivante :

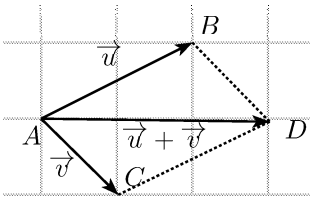
On choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ représente le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, $\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ peut aussi être représenté de la manière suivante :

On choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.



Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B et C, $\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.

3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition:

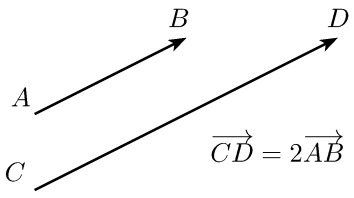
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan et λ un nombre réel non-nul :

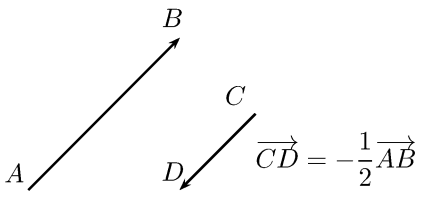
- *Le vecteur $\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que $(AB)\backslash\backslash(CD)$*

si $\lambda>0$	*si $\lambda<0$*
• *$\overrightarrow{CD}$ a même sens que $\overrightarrow{AB}$*	• *$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire*
• *$CD=\lambda\times AB$*	• *$CD=-\lambda\times AB$*

Exemples:

Voici deux exemples avec $\lambda=2$ et $\lambda=-\dfrac{1}{2}$





Remarques:

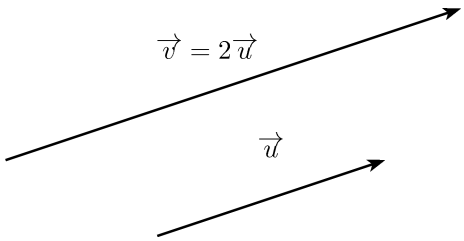
- *Si $\lambda=0$ ou si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ alors $\lambda\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.*
- *Si $\lambda=-1$:*
  - *On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ sont opposés ;*
  - *Le vecteur qui a même norme et même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais qui a le sens opposés est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ donc :*

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

4 Vecteurs colinéaires

Définition:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple:
$\vec{v} = 2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Remarque:
Le vecteur nul est donc colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété:
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non-nuls, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \textit{(AB) et (CD)} & & \overrightarrow{AB} \textit{ et } \overrightarrow{CD} & & \textit{il existe un} \\ \textit{sont} & \Leftrightarrow & \textit{sont} & \Leftrightarrow & \textit{nombre } \lambda \textit{ tel que} \\ \textit{parallèles} & & \textit{colinéaires} & & \overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB} \end{array}$$

Propriété:
Trois points distincts du plan A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve :
A, B et C sont alignés et distincts $\Leftrightarrow (AB)\backslash\backslash(AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

5 Règles de calcul

Propriété:
Pour tous réels λ et β et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- $(\lambda + \beta) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
- $\lambda\dot{(}\beta \cdot \vec{u}) = \lambda\beta \cdot \vec{u}$