

Étude de la fonction carré

1) La fonction carré

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto x^2$$

1. Déterminer les images de -3 ; $-\sqrt{2}$; 0 ; 7 et $2 + \sqrt{3}$ par la fonction carré.
2. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
 b. Montrer que pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$.
 c. En déduire que la représentation graphique de la fonction carré admet un axe de symétrie.
3. Conjecturer les variations de la fonction carré.

Pour démontrer ces conjectures, on considère deux réels a et b tels que $a < b$ et on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

4. a. Factoriser $f(b) - f(a)$.
 b. Pour a et b deux réels négatifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
 c. Que peut-on en déduire?
 d. Pour a et b deux réels positifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
 e. Que peut-on en déduire?

2) Encadrement

1. Sans effectuer de calcul :
 a. Comparer les carrés de -2001 et -2003 .
 b. Comparer les carrés de $0,001$ et $0,1$.
2. Recopier et compléter en justifiant au préalable votre réponse :
 a. Si $x > 7$ alors $x^2 > \dots$
 b. Si $x < -\sqrt{2}$ alors $x^2 > \dots$
3. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
 a. Si $x > 7$ alors $x^2 > 7$
 b. Si $x < -2$ alors $x^2 < 4$

3) Équations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
 b. Résoudre graphiquement les équations $x^2 = 1$; $x^2 = -1$ et $x^2 = 4$.
2. Résoudre algébriquement les équations $x^2 = 2$; $x^2 = 0$ et $x^2 = 121$.
3. Résoudre algébriquement l'équation $x^2 = a$ selon les valeurs prises par le nombre réel a .

4) Inéquations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
 b. Résoudre graphiquement les inéquations $x^2 < 1$; $x^2 \geq -1$ et $x^2 > 4$.
2. a. Déterminer le signe de $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
 b. En déduire les solutions de l'inéquation $x^2 > 3$.
3. Résoudre algébriquement l'inéquation $x^2 \leq 45$.