

Chapitre 9: Fonctions homographiques

1 Fonction inverse

Définition:

La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

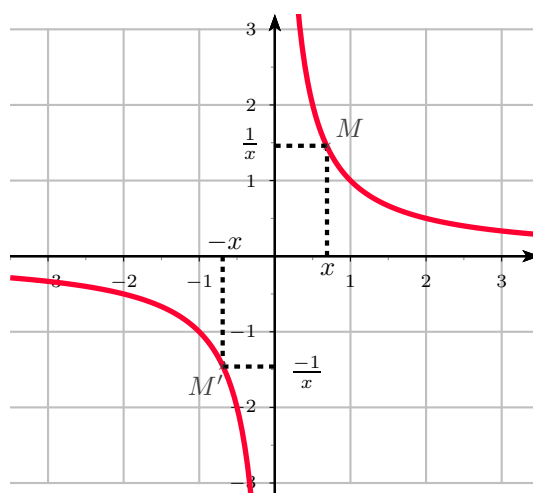
Théorème:

La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

Propriété:

- La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole.

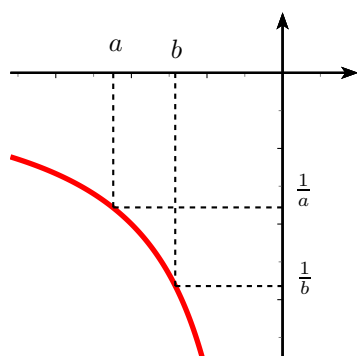


- Pour tout réel x non-nul, $f(-x) = -f(x)$ donc les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que l'hyperbole est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La droite d'équation $x = 0$ (c'est à dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à cette hyperbole.
- La droite d'équation $y = 0$ (c'est à dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à cette hyperbole.

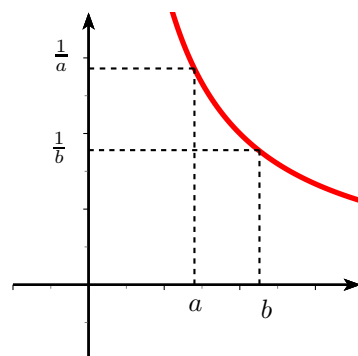
Théorème:

Pour tous nombres réels a et b de même signe :

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$



Autrement dit, deux nombres non-nuls de même signe sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.



2 Fonctions homographiques

Définition:

On appelle fonction homographique toute fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des nombres réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Remarques:

- La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole.
- La droite d'équation $x = -\frac{d}{c}$ est une asymptote verticale à cette hyperbole.
- La droite d'équation $y = \frac{a}{c}$ est une asymptote horizontale à cette hyperbole.

Exemple:

La fonction f définie par $f(x) = \frac{-x+1}{2x-3}$ est une fonction homographique avec $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = -3$.

- Son domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.
- La droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est une asymptote verticale à cette hyperbole.
- La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale à cette hyperbole.

