

Étude de la fonction inverse

1) Définition et propriétés

La fonction inverse est la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction inverse.
2. Déterminer les images de -3 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{7}{5}$ et 10 par la fonction inverse.
3.
 - a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse.
 - b. Montrer que pour tout réel x non-nul, $f(-x) = -f(x)$.
 - c. En déduire que la représentation graphique de la fonction inverse admet un centre de symétrie.
4. Conjecturer les variations de la fonction inverse.

Pour démontrer ces conjectures, on considère deux réels a et b tels que $a < b$ et on va étudier le signe de $f(a) - f(b)$.

5.
 - a. Factoriser $f(a) - f(b)$.
 - b. Pour a et b deux réels strictement négatifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
 - c. Que peut-on en déduire?
 - d. Pour a et b deux réels strictement positifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
 - e. Que peut-on en déduire?

2) Encadrement

1. Sans effectuer de calcul :
 - a. Comparer les inverses de -2001 et -2003 .
 - b. Comparer les inverses de $0,001$ et $0,1$.
2. Recopier et compléter en justifiant au préalable votre réponse :
 - a. Si $x > 7$ alors $\dots < \frac{1}{x} < \dots$
 - b. Si $x < -2$ alors $\dots < \frac{1}{x} < \dots$
3. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
 - a. Si $x > 4$ alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$
 - b. Si $x < -3$ alors $\frac{1}{x} < -2$

3) Équations

1.
 - a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse.
 - b. Résoudre graphiquement les équations $\frac{1}{x} = 1$; $\frac{1}{x} = -1$ et $\frac{1}{x} = 0$.
2. Résoudre algébriquement les équations $\frac{1}{x} = 1$; $\frac{1}{x} = -67$ et $\frac{1}{x} = 0$.
3. Résoudre algébriquement l'équation $\frac{1}{x} = a$ selon les valeurs prises par le nombre réel a .

4) Inéquations

1.
 - a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction inverse
 - b. Résoudre graphiquement les inéquations $\frac{1}{x} < 1$; $\frac{1}{x} \geq -1$ et $\frac{1}{x} > 2$.
2. Résoudre algébriquement l'inéquation $\frac{1}{x} \leq 10$.
3. Résoudre algébriquement l'inéquation $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$.