

Éléments de réponse

- La simulation de 1000 lancers de trois dés ne permet pas d'affirmer que le Duc de Toscane a vu juste. En effet, des élèves obtiennent plus de 9 que de 10 mais la majorité des élèves obtiennent plus de 10 que de 9. Seulement, les intervalles de confiance au seuil de 95% se croisent.
- La simulation de 100 000 lancers de trois dés permet d'affirmer que le Duc de Toscane semble avoir vu juste. En effet, tous les élèves obtiennent plus de 10 que de 9 et les intervalles de confiance au seuil de 95% sont disjoints.
- Pour comprendre ces résultats, il faut modéliser l'expérience réalisée. Lorsque l'on jette trois dés, on obtient $6^3 = 216$ combinaisons de trois chiffres de la forme $(1; 4; 5)$ où 1 est le résultat du premier dé, 4 est le résultat du second dé et 5 est le résultat du troisième dé. L'erreur de raisonnement du Duc de Toscane est la suivante :

→ $1 + 2 + 6$ peut être obtenu de 6 façons différentes :

$$(1; 2; 6); (1; 6; 2); (2; 1; 6); (2; 6; 1); (6; 1; 2); (6; 2; 1)$$

→ $1 + 4 + 4$ peut être obtenu de 3 façons différentes :

$$(1; 4; 4); (4; 1; 4); (4; 4; 1)$$

→ $3 + 3 + 3$ peut être obtenu d'une unique façon :

$$(3; 3; 3)$$

En reprenant les décompositions du départ :

$$\rightarrow 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$

$$\rightarrow 10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$$

on obtient qu'il y a 25 façons d'obtenir 9 et 27 façons d'obtenir 10 donc la probabilité d'apparition du 9 est

$$p = \frac{25}{216}$$

et la probabilité d'apparition du 10 est

$$p = \frac{27}{216}$$

- Pour ce qui est des questions supplémentaires, on obtient pour 1000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216} - \frac{1}{\sqrt{1000}}; \frac{25}{216} + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,0841; 0,1474]$$

et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216} - \frac{1}{\sqrt{1000}}; \frac{27}{216} + \frac{1}{\sqrt{1000}} \right] = [0,0934; 0,1566]$$

Ces deux intervalles ont une intersection commune donc il était possible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la première simulation.

- Pour 100 000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216} - \frac{1}{\sqrt{100\,000}}; \frac{25}{216} + \frac{1}{\sqrt{100\,000}} \right] = [0,1126; 0,1189]$$

et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216} - \frac{1}{\sqrt{100\,000}}; \frac{27}{216} + \frac{1}{\sqrt{100\,000}} \right] = [0,1218; 0,1282]$$

Ces deux intervalles n'ont pas d'intersection commune donc il était impossible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la seconde simulation.