Fonctions et solides

Problème 1

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $CG = 6$ et on place un point S sur le segment $[AE]$.

Pour quelle(s) position(s) du point S le volume de la pyramide $SABCD$ est-il supérieur au volume du tétraèdre $SEHF$?

1. Représenter la situation par un dessin en perspective cavalière.
2. On pose $AS = x$.
3. a. Déterminer le volume V_P de la pyramide $SABCD$ en fonction de x .
b. Déterminer le volume V_T du tétraèdre $SEHF$ en fonction de x .
c. Répondre au problème initiale.
4. Ouvrir le logiciel GEOPLAN-GEOSPACE.
a. Saisir les points $A(0, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(-4, 3, 0)$, $D(-4, 0, 0)$, $E(0, 0, 6)$, $F(0, 3, 6)$, $G(-4, 3, 6)$ et $H(-4, 0, 6)$.

Créer > Point > Point repéré > Dans l'espace

- b. Créer le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Nommer le PR .

Créer > Solide > Polyèdre convexe > Défini par ses sommets

- c. Créer le point S puis le tétraèdre $SEHF$ (on le nommera T) et la pyramide $SABCD$ (on la nommera P)

Créer > Point > Point libre > Sur un segment

- d. Calculer le volume du tétraèdre $SEHF$ (on le nommera VT) et celui de la pyramide $SABCD$ (on le nommera VP) :

Créer > Numérique > Calcul géométrique > Volume d'un solide

puis les afficher :

Créer > Affichage > Variable numérique déjà définie

- e. Afficher la longueur du segment $[AS]$:

Créer > Affichage > Longueur d'un segment

- f. Déplacer le point S sur le segment $[AE]$ puis comparer les volumes des deux solides.

Problème 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$. On place M le point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$, N le point du segment $[AD]$ tel que $AN = x$ et P le point du segment $[AE]$ tel que $EP = x$.

Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume du tétraèdre $AMNP$ est-il maximal ?

1. Saisir les points $A(0, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(4, 4, 0)$, $D(4, 0, 0)$, $E(0, 0, 4)$, $F(0, 4, 4)$, $G(4, 4, 4)$ et $H(4, 0, 4)$ puis construire le cube $ABCDEFGH$.
2. Créer la variable x :

Créer > Numérique > Variable réelle libre dans un intervalle

3. Créer les points M , N et P puis construire le tétraèdre $AMNP$.

Créer > Point > Point repéré > Sur une demi-droite

4. Créer le volume du tétraèdre $AMNP$ puis l'afficher ainsi que la variable réelle x .
5. Piloter au clavier la variable réelle x puis conjecturer une réponse à la question initiale.
6. Déterminer le volume V du tétraèdre $AMNP$ en fonction de x .
7. Tracer la courbe de la fonction V sur $[0; 4]$ puis en déduire graphiquement le maximum de V sur $[0; 4]$.
8. Montrer que pour tout réel x :

$$\frac{-x^3 + 4x^2}{6} - \frac{128}{81} = \frac{-(3x - 8)^2(3x + 4)}{162}$$

9. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume du tétraèdre $AMNP$ est maximal.