Chapitre 5: fonctions affines

1 Définition d'une fonction affine

Définition:
$\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ désignent deux nombres réels donnés. Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

Remarques:

- *Pour $b = 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto ax$, c'est une fonction **linéaire**.*
- *Pour $a = 0$, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto b$, c'est une fonction **constante**.*

2 Représentation graphique

Propriété:
f est une fonction affine définie par $f : x \longmapsto ax + b$ et on choisi un repère orthogonal alors la représentation graphique de la fonction affine f est une droite.

Remarques:
De plus, si on nomme (d) cette droite :

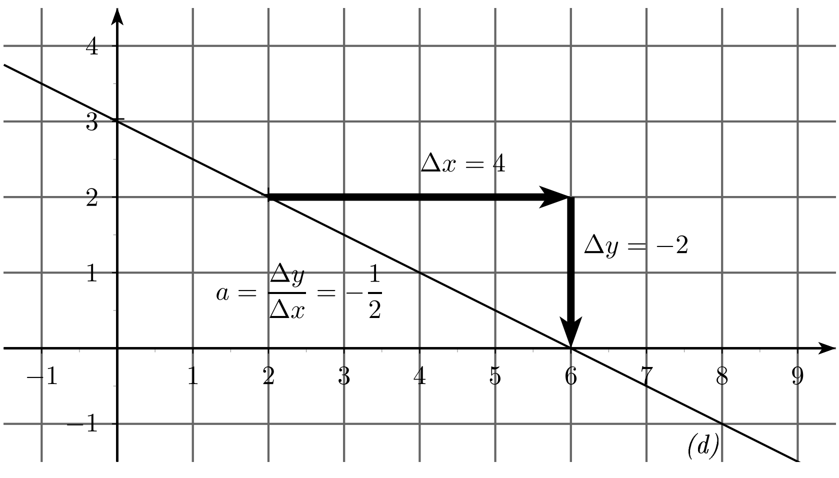
- *La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; b)$.*
- *Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d).*
- *Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** de la droite (d).*
- *La droite (d) a pour équation $y = ax + b$.*

Exemple:
On considère la fonction affine $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x + 3$.

Sa représentation graphique est une droite (d), d'ordonnée à l'origine 3 et de coefficient directeur $-\dfrac{1}{2}$.

Comme $f(0) = 3$ et $f(2) = 2$, la droite (d) passe par les points de coordonnées $(0; 3)$ et $(2; 2)$.

On dit que la droite (d) a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.



On remarque que si l'accroissement des abscisses est $\Delta x = 4$ et si l'accroissement des ordonnées est $\Delta y = -2$ alors

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$

3 Proportionnalité des accroissements

Propriété:
a et b désignent des nombres réels et f est la fonction affine telle que $f(x) = a\,x + b$. Pour deux nombres distincts x_1 et x_2, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Démonstration:
Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$, on a : $\quad f(x_1) = ax_1 + b \quad$ et $\quad f(x_2) = ax_2 + b$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \textit{Puisque} \quad x_2 - x_1 \neq 0 \\ &= a \end{aligned}$$

4 Sens de variation

Propriété:
f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
- *Si $a < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

Démonstration:
Soit x_1 et x_2 deux nombres réels tels que $x_1 < x_2$ et f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

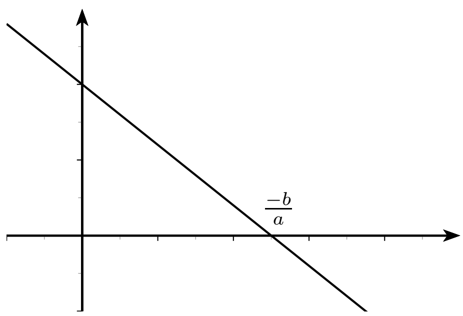
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\ f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - ax_1 - b \\ f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

et commme $x_2 - x_1 > 0$ on en déduit que $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de a
- *Si $a < 0$, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, c'est à dire $f(x_1) > f(x_2)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a = 0$, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, c'est à dire $f(x_1) = f(x_2)$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $a > 0$, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, c'est à dire $f(x_1) < f(x_2)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

5 Signe d'une fonction affine

Propriété:
f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
- *Si $a < 0$, f admet le tableau de signe ci-dessous :*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		+	0	-	



- *Si $a > 0$, f admet le tableau de signe ci-dessous :*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		-	0	+