Fonctions et solides

Problème 1

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $CG = 6$ et on place un point S sur le segment $[AE]$.

Pour quelle(s) position(s) du point S le volume de la pyramide $SABCD$ est-il supérieur au volume du tétraèdre $SEFH$?

1. Représenter la situation par un dessin en perspective cavalière.
2. On pose $AS = x$.
3. a. Déterminer le volume V_P de la pyramide $SABCD$ en fonction de x.
   b. Déterminer le volume V_T du tétraèdre $SEFH$ en fonction de x.
   c. Répondre au problème initiale.
4. Ouvrir le logiciel GEOPLAN-GEOSPACE.
   a. Saisir les points $A(0,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(-4,3,0)$, $D(-4,0,0)$, $E(0,0,6)$, $F(0,3,6)$, $G(-4,3,6)$ et $H(-4,0,6)$.

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Point}} > \boxed{\text{Point repéré}} > \boxed{\text{Dans l'espace}}$

   b. Créer le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Nommer le PR.

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Solide}} > \boxed{\text{Polyèdre convexe}} > \boxed{\text{Défini par ses sommets}}$

   c. Créer le point S puis le tétraèdre $SEFH$ (on le nommera T) et la pyramide $SABCD$ (on la nommera P)

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Point}} > \boxed{\text{Point libre}} > \boxed{\text{Sur un segment}}$

   d. Calculer le volume du tétraèdre $SEFH$ (on le nommera VT) et celui de la pyramide $SABCD$ (on le nommera VP) :

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Numérique}} > \boxed{\text{Calcul géométrique}} > \boxed{\text{Volume d'un solide}}$

   puis les afficher :

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Affichage}} > \boxed{\text{Variable numérique déjà définie}}$

   e. Afficher la longueur du segment $[AS]$:

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Affichage}} > \boxed{\text{Longueur d'un segment}}$

   f. Déplacer le point S sur le segment $[AE]$ puis comparer les volumes des deux solides.

Problème 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$. On place M le point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$, N le point du segment $[AD]$ tel que $AN = x$ et P le point du segment $[AE]$ tel que $EP = x$.

Pour quelle(s) valeur(s) de x le volume du tétraèdre $AMNP$ est-il maximal ?

1. Saisir les points $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(4,4,0)$, $D(4,0,0)$, $E(0,0,4)$, $F(0,4,4)$, $G(4,4,4)$ et $H(4,0,4)$ puis construire le cube $ABCDEFGH$.
2. Créer la variable x :

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Numérique}} > \boxed{\text{Variable réelle libre dans un intervalle}}$

3. Créer les points M, N et P puis construire le tétraèdre $AMNP$.

   $\boxed{\text{Créer}} > \boxed{\text{Point}} > \boxed{\text{Point repéré}} > \boxed{\text{Sur une demi-droite}}$

4. Créer le volume du tétraèdre $AMNP$ puis l'afficher ainsi que la variable réelle x.
5. Piloter au clavier la variable réelle x puis conjecturer une réponse à la question initiale.
6. Déterminer le volume V du tétraèdre $AMNP$ en fonction de x.
7. Tracer la courbe de la fonction V sur $[0;4]$ puis en déduire graphiquement le maximum de V sur $[0;4]$.
8. Montrer que pour tout réel x :
$$\frac{-x^3+4x^2}{6} - \frac{128}{81} = \frac{-(3x-8)^2(3x+4)}{162}$$
9. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume du tétraèdre $AMNP$ est maximal.