Éléments de réponse

- On obtient pour 1000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216}-\frac{1}{\sqrt{1000}};\frac{25}{216}+\frac{1}{\sqrt{1000}}\right]=[0,0841;0,1474]$$

  et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216}-\frac{1}{\sqrt{1000}};\frac{27}{216}+\frac{1}{\sqrt{1000}}\right]=[0,0934;0,1566]$$

  Ces deux intervalles ont une intersection commune donc il était possible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la première simulation.

- Pour 100 000 lancers l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 9 :

$$\left[\frac{25}{216}-\frac{1}{\sqrt{100\,000}};\frac{25}{216}+\frac{1}{\sqrt{100\,000}}\right]=[0,1126;0,1189]$$

  et l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'apparition du 10 :

$$\left[\frac{27}{216}-\frac{1}{\sqrt{100\,000}};\frac{27}{216}+\frac{1}{\sqrt{100\,000}}\right]=[0,1218;0,1282]$$

  Ces deux intervalles n'ont pas d'intersection commune donc il était impossible de trouver plus de 9 que de 10 au seuil de 95% dans la seconde simulation.

- Pour comprendre ces résultats, il faut modéliser l'expérience réalisée. Lorsque l'on jette trois dés, on obtient $6^3=216$ combinaisons de trois chiffres de la forme $(1;4;5)$ où 1 est le résultat du premier dé, 4 est le résultat du second dé et 5 est le résultat du troisième dé. L'erreur de raisonnement du Duc de Toscane est la suivante :

  $\longrightarrow$ $1+2+6$ peut être obtenu de 6 façons différentes :

$$(1;2;6);(1;6;2);(2;1;6);(2;6;1);(6;1;2);(6;2;1)$$

  $\longrightarrow$ $1+4+4$ peut être obtenu de 3 façons différentes :

$$(1;4;4);(4;1;4);(4;4;1)$$

  $\longrightarrow$ $3+3+3$ peut être obtenu d'une unique façons :

$$(3;3;3)$$

  En reprenant les décompositions du départ :

  $\longrightarrow$ $9=1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3$

  $\longrightarrow$ $10=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+3+5=2+4+4=3+3+4$

  on obtient qu'il y a 25 façons d'obtenir 9 et 27 façons d'obtenir 10 donc la probabilité d'apparition du 9 est

$$p=\frac{25}{216}$$

  et la probabilité d'apparition du 10 est

$$p=\frac{27}{216}$$