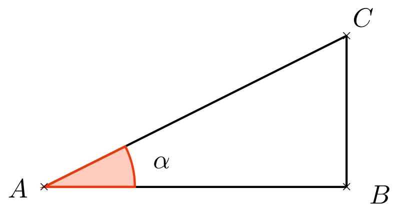
Autour du cercle trigonométrique

1 Rappels



On considère un triangle ABC rectangle en B et on note α la mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{BAC}$. On a alors :

$$cos\alpha = \frac{AB}{AC} \quad et \quad sin\alpha = \frac{BC}{AC}$$

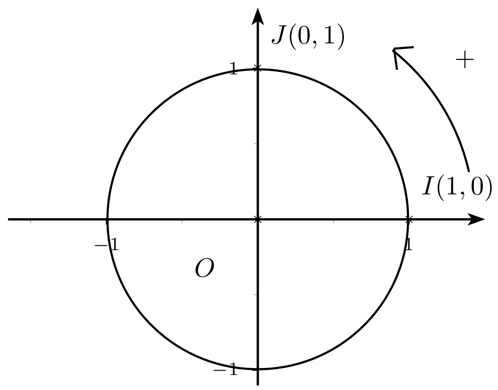
Exercice 1:
Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ et $AC = 2\sqrt{3}$. Déterminer les mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$.

Exercice 2:
Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 3$ et $sin\,\widehat{BAC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer les valeurs exactes de AC et BC.

2 Le cercle trigonométrique

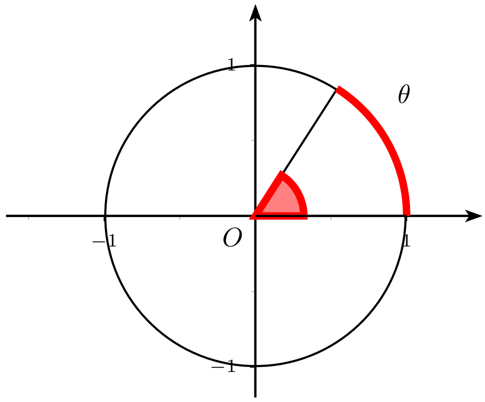
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Définition:
le cercle trigonométrique est le cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1, sur lequel on choisit un sens de parcours appelé le sens direct.



Exercice 3:
Déterminer le périmètre du cercle $\mathcal{C}$.

Définition:
Le radian est l'unité de mesure d'angle définie de la manière suivante :
Un angle de sommet O mesure θ radians lorsque la longueur de l'arc de $\mathcal{C}$ qu'il intercepte est θ.



Exercice 4:
Les mesures des angles en degrés et en radians sont proportionnelles. Le périmètre du cercle $\mathcal{C}$ est de 2π donc un angle de 360 degrés mesure 2π radians. Compléter alors le tableau ci-dessous :

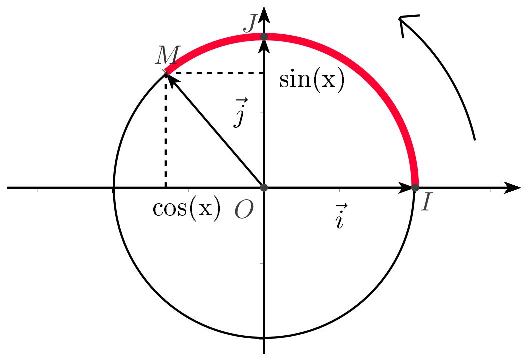
Mesure en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radian							

3 Cosinus et sinus d'un nombre

On va maintenant définir le cosinus et le sinus de n'importe quel angle en radians. Pour cela, on établit une correspondance entre l'ensemble $\mathbb{R}$ et les points du cercle trigonométrique.

3.1 Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.



Soit $x \in \mathbb{R}$. En partant de I et en se placent sur $\mathcal{C}$, on parcourt un chemin de longueur $|x|$ en tournant :

- dans le sens positif si $x > 0$;
- dans le sens négatif si $x < 0$.

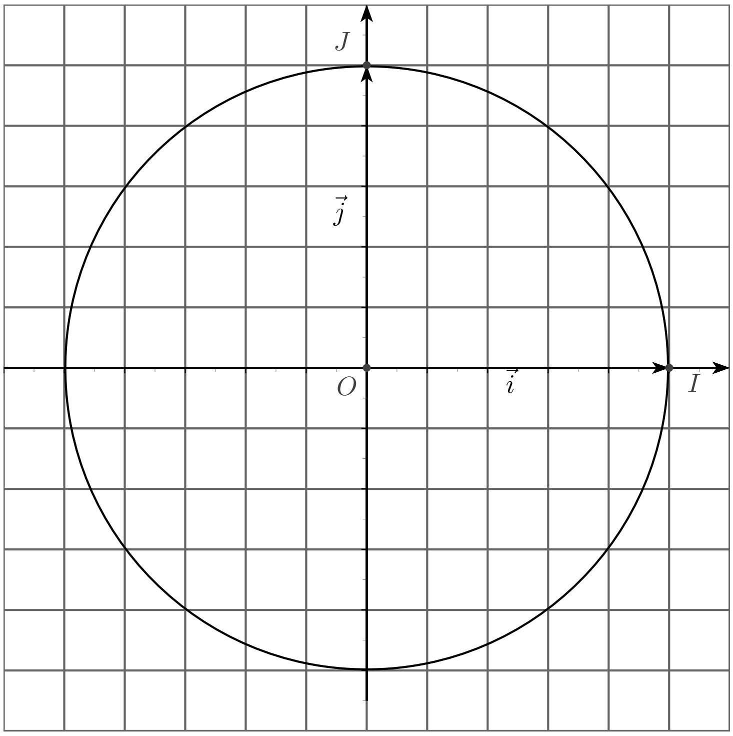
On aboutit ainsi à un point M de $\mathcal{C}$, associé de manière unique à x. On définit ainsi la fonction :

$$M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ x & \longmapsto & M(x) \end{array} \right.$$

Exercice 5:
On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.

1. Placer sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ les points M_i tels que l'angle $\widehat{IOM_i}$ mesure α_i radians :

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{6} \quad ; \quad \alpha_5 = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad \alpha_6 = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \alpha_7 = \frac{7\pi}{4} \quad ; \quad \alpha_8 = \pi$$



2. Pour chaque point, donner deux autres mesure d'angle en radians qui lui correspond (une positive et une négative).

Définition:
Le cosinus de x, noté cos, est l'abscisse de $M(x)$ dans le repère.
Le sinus de x, noté sin, est l'ordonnée de $M(x)$ dans le repère.

Exercice 6:
A l'aide du cercle trigonométrique de l'exercice 5, compléter le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	-$\frac{\pi}{2}$	2π
Mesure de l'angle en degré					
$cos(x)$					
$sin(x)$					

Exercice 7:
Dans un repère orthonormé du plan (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.

1. Placer sur le cercle le point M associé à $\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer la nature du triangle OMI.
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

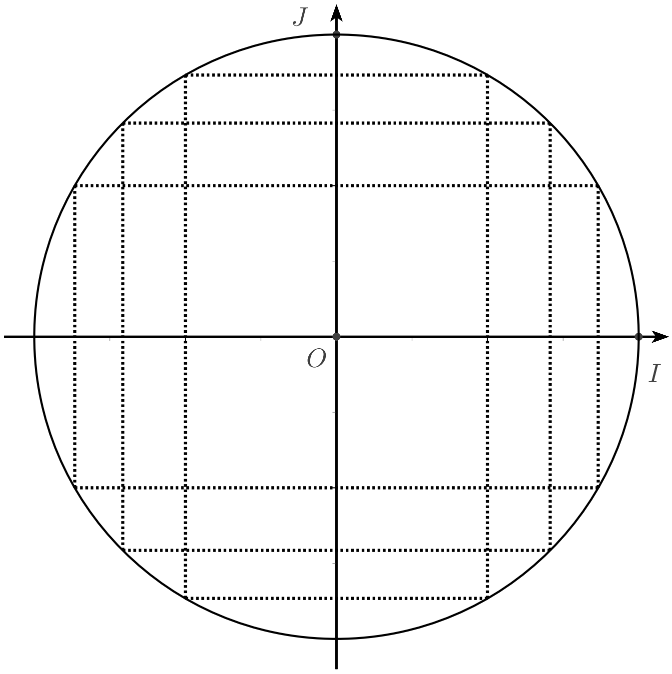
Exercice 8:
Dans un repère orthonormé du plan (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.

1. Placer sur le cercle le point M associé à $\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer la nature du triangle OMH où H est le projeté orthogonal de M sur (OI).
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 9:
Dans un repère orthonormé du plan (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.

1. Placer sur le cercle le point M associé à $\frac{\pi}{6}$.
2. Déterminer la nature du triangle OMJ.
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 10:
Dans un repère orthonormé du plan (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1.
Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $\widehat{IOM}$ mesure x radians.



1. Justifier que pour tout réel x,

$$-1 \leq cos(x) \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq sin(x) \leq 1 \quad et \quad (cos(x))^2 + (sin(x))^2 = 1$$

2. Compléter les tableaux ci-dessous et le le cercle ci-dessus :

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
Mesure de l'angle en degré							
$cos(x)$							
$sin(x)$							

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
Mesure de l'angle en degré							
$cos(x)$							
$sin(x)$							