

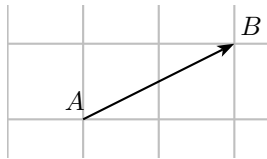
Chapitre 1: Vecteurs I

1 Notion de vecteur

Définition:

Soit A et B deux points distincts du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction : celle de la droite (AB) et de toutes les droites parallèles à (AB) ;
- son sens : de A vers B ;
- sa norme : la distance AB que l'on note aussi $\|\overrightarrow{AB}\|$.



Remarque:

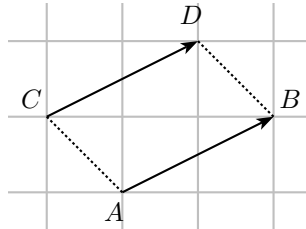
Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ s'appelle le vecteur nul et est noté $\vec{0}$.

Le vecteur n'a ni direction ni sens, sa norme est égale à 0.

Définition:

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si

D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

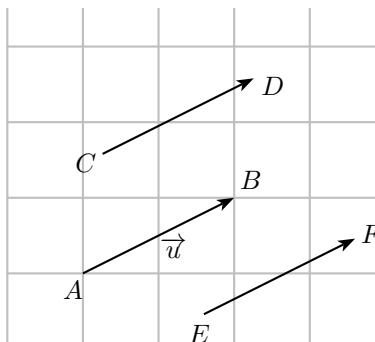


Conséquences :

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non-nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (qui peut-être aplati).

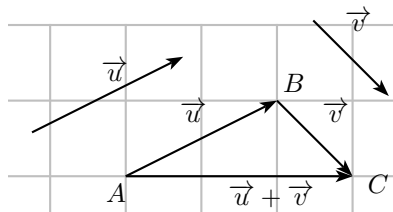
Remarque:

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan, on peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal au vecteur $\vec{u}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ a une infinité de représentants !



2 Additions de vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$ que l'on peut représenter de l'une des deux manières suivantes :

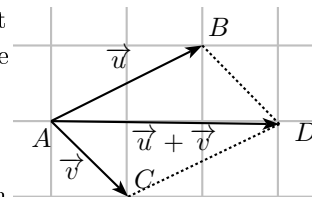


On choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ représente le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

On choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.



Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B et C , $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.

3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition:

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan et λ un nombre réel non-nul :

- Le vecteur $\lambda \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que $(AB) \parallel (CD)$

si $\lambda > 0$

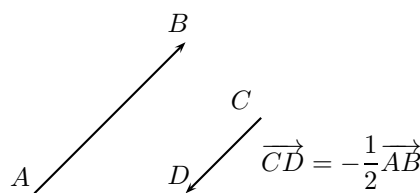
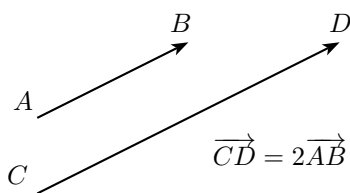
- $\overrightarrow{CD}$ a même sens que $\overrightarrow{AB}$
- $CD = \lambda \times AB$

si $\lambda < 0$

- $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire
- $CD = -\lambda \times AB$

Exemples:

Voici deux exemples avec $\lambda = 2$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$



Remarques:

- Si $\lambda = 0$ ou si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $\lambda \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- Si $\lambda = -1$:
 - On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ sont opposés ;
 - Le vecteur qui a même norme et même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais qui a le sens opposés est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ donc :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

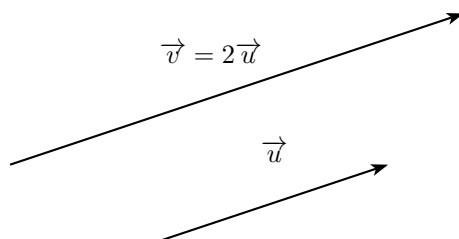
4 Vecteurs colinéaires

Définition:

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple:

$\vec{v} = 2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Remarque:

Le vecteur nul est donc colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété:

Si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont deux vecteurs non-nuls, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} (AB) \text{ et } (CD) & & \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} & & \text{il existe un} \\ \text{sont} & \Leftrightarrow & \text{sont} & \Leftrightarrow & \text{nombre } \lambda \text{ tel que} \\ \text{parallèles} & & \text{colinéaires} & & \vec{CD} = \lambda \vec{AB} \end{array}$$

Propriété:

Trois points distincts du plan A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Preuve :

A , B et C sont alignés et distincts $\Leftrightarrow (AB) \parallel (AC) \Leftrightarrow \vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires