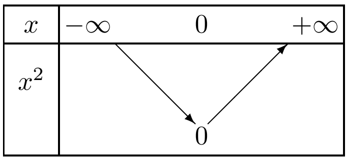
Chapitre 12: Fonctions carré et inverse

1 Fonction carré

Définition:
La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

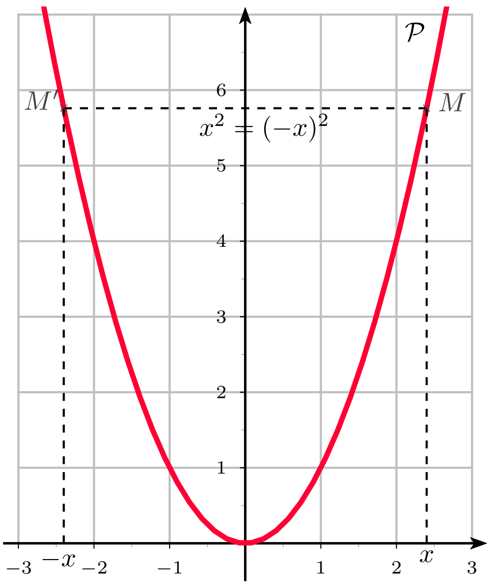
$$f : x \longmapsto x^2$$

Théorème:
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.



Remarques:
- *0 est le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, il est atteint pour $x = 0$*
- *Pour tout nombre réel x, $f(x) \geq 0$. On dit que la fonction carré est positive.*

Propriété:
La représentation graphique de la fonction carré est une parabole.

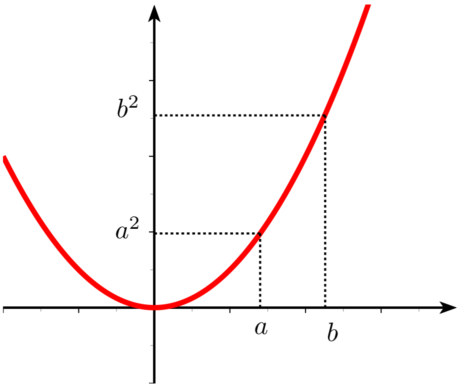


Remarques:
- *L'origine O est le sommet de cette parabole.*
- *Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.*
  - $\longrightarrow$ *Les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées qui est alors un axe de symétrie de la parabole.*
  - $\longrightarrow$ *La fonction carré est dite paire.*

Théorème:

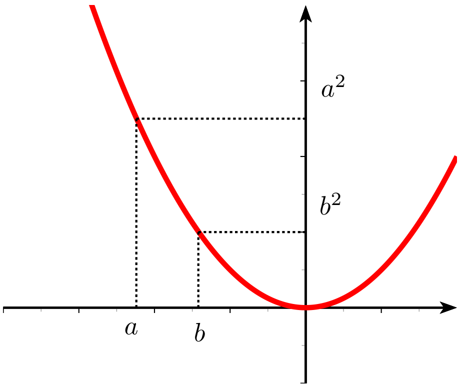
- *Pour tous nombres réels positifs a et b :*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$



- *Pour tous nombres réels négatifs a et b :*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$$



Remarque:
Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "équivaut à".

2 Fonction inverse

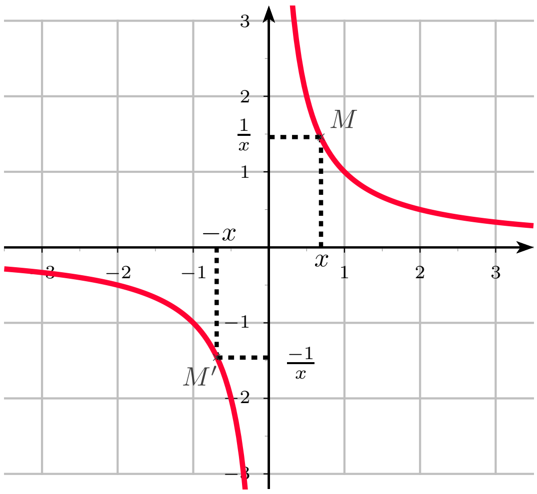
Définition:
La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[=\mathbb{R}^{\star}$ *par :*

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Théorème:
La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ *et strictement décroissante sur l'intervalle* $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

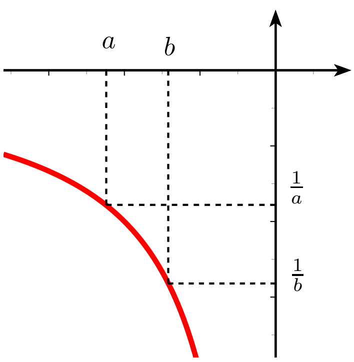
Propriété:
- *La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole.*



- *Pour tout réel* x *non-nul,* $f(-x)=-f(x)$
  - $\longrightarrow$ *Les points* $M(x;f(x))$ *et* $M'(-x;f(-x))$ *sont symétriques par rapport à l'origine. On en déduit que l'hyperbole est symétrique par rapport à l'origine du repère.*
  - $\longrightarrow$ *La fonction inverse est dite impaire.*
- *La droite d'équation* $x=0$ *(c'est à dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à cette hyperbole.*
- *La droite d'équation* $y=0$ *(c'est à dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale à cette hyperbole.*

Théorème:
Pour tous nombres réels a *et* b *de même signe :*

$$a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$



Autrement dit, deux nombres non-nuls de même signe sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.