

Étude de la fonction carré

1 Définition et propriétés

La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto x^2$$

1. Déterminer les images de -3 ; $-\sqrt{2}$; 0 ; 7 et $2 + \sqrt{3}$ par la fonction carré.
2. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
b. Donner l'équation de l'axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction carré.
3. Conjecturer les variations de la fonction carré.

Pour démontrer ces conjectures, on considère deux réels a et b tels que $a < b$ et on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

4. a. Factoriser $f(b) - f(a)$.
b. Pour a et b deux réels négatifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
c. Que peut-on en déduire?
d. Pour a et b deux réels positifs, montrer que si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
e. Que peut-on en déduire?

2 Encadrement

1. Sans effectuer de calcul :
a. Comparer les carrés de -201 et -203 .
b. Comparer les carrés de $\pi - 1$ et $\sqrt{2} + 2$.
2. Recopier et compléter en justifiant votre réponse (on pourra s'aider de la courbe de la fonction carré) :
a. Si $x > 7$ alors $x^2 > \dots$
b. Si $x < -\sqrt{2}$ alors $x^2 > \dots$
3. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :
a. Si $x > 3$ alors $x^2 > 10$
b. Si $x < -2$ alors $x^2 < 4$

3 Équations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
b. Résoudre graphiquement les équations $x^2 = 1$; $x^2 = -1$ et $x^2 = 4$.
2. a. Pour tout réel x , développer $(x - 11)(x + 11)$.
b. En déduire les solutions de l'équation $x^2 = 121$.
3. Résoudre les équations $x^2 = 7$ et $x^2 = 9$.
4. Résoudre l'équation $x^2 = a$ selon les valeurs prises par le nombre réel a .

4 Inéquations

1. a. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction carré pour $x \in [-3; 3]$.
b. Résoudre graphiquement les inéquations $x^2 < 1$; $x^2 \geq -1$ et $x^2 > 4$.
2. a. Déterminer le signe de $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.
b. En déduire les solutions de l'inéquation $x^2 > 3$.
3. Résoudre algébriquement l'inéquation $x^2 \leq 45$.