

## Fonctions homographiques

### Définition:

On appelle fonction homographique toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$  par  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels avec  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$

### Exercice 1:

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x}{2-5x}, \quad g(x) = 1 + \frac{1}{3x-7}, \quad h(x) = x - 1 - \frac{2x^2}{2x+3}$$

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
2. Montrer que ces trois fonctions sont des fonctions homographiques.
3. Tracer à l'aide de votre calculatrice la représentation graphique de ces trois fonctions.

### Exercice 2:

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Déterminer la nature de la fonction  $f$ .
3. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction  $f$ .
4. Déterminer le signe de la fonction  $f$ .
5. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation  $f(x) = 2$ .
6. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation  $f(x) < -1$ .
7. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -2x - 1$ .
  - a. Résoudre l'équation  $f(x) + 2x + 1 = 0$ .
  - b. Interpréter graphiquement les solutions de cette équation.
  - c. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation  $f(x) < g(x)$ .

### Exercice 3:

Soit  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x-3}{2x-3}$$

et  $h$  la fonction définie par

$$h(x) = \frac{-2x+6}{x-2}$$

1. Étude de la fonction  $g$  :
  - a. Déterminer la nature de la fonction  $g$ .
  - b. Tracer dans un repère la représentation graphique de la fonction  $g$ .
  - c. Déterminer le signe de la fonction  $g$ .
  - d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation  $g(x) = -1$ .
  - e. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation  $g(x) < 2$ .
2. Étude de la fonction  $h$  :
  - a. Déterminer la nature de la fonction  $h$ .
  - b. Tracer dans le même repère la représentation graphique de la fonction  $h$ .
  - c. Déterminer le signe de la fonction  $h$ .
  - d. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation  $h(x) = -1$ .
  - e. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation  $h(x) > -3$ .
3. Étude des positions relatives des courbes des deux fonctions :
  - a. Montrer que pour tout réel  $x$ ,
 
$$(x-3)(5x-8) = 5x^2 - 23x + 24$$
  - b. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation  $h(x) = g(x)$ .
  - c. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation  $h(x) \leq g(x)$ .