Chapitre 2: Fonctions I

1 Définition, image et antécédent

Dans cette partie, D est intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition:
On définit une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque nombre x de D un unique nombre réel noté $f(x)$. On note cette fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Vocabulaire:
- *D est l'**ensemble de définition** de f. On dit que f est définie sur D.*
- *Le nombre $f(x)$ est appelé **image de x par f**.*

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$.
- *$]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$ est l'ensemble de définition de f.*
- $$\begin{array}{rcl} f(-1) & = & \frac{3\times(-1)}{-1+2} \\ & = & \frac{-3}{1} \\ & = & -3 \end{array}$$

  L'image du nombre -1 par la fonction f est -3, ce qui se note $f(-1) = -3$.
- *On dit aussi que -3 est un **antécédent** du nombre -1 par la fonction f.*

Définition:
Soit f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.
*Si un nombre k est l'image d'un nombre x, c'est à dire si $f(x) = k$, alors on dit que x **est un antécédent de** k.*

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. On a :

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0 \quad et \quad f(1) = 1^2 - 1 = 0$$

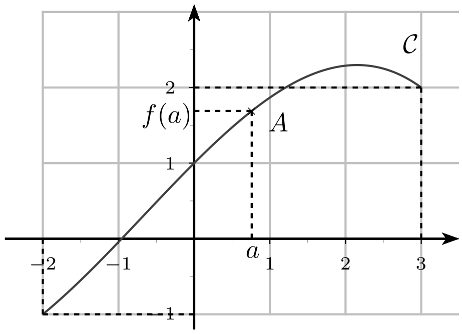
-1 et 1 sont deux antécédents de 0 par la fonction f.

Remarque:
Pour montrer que -1 et 1 sont les deux seuls antécédents de 0 par la fonction f, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$ soit $x^2 - 1 = 0$.

2 Représentation graphique

Définition:
f est une fonction définie sur D.
*La **représentation graphique** $\mathcal{C}$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x est un nombre de D.*

Exemple:
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $D = [-2; 3]$. Le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$.

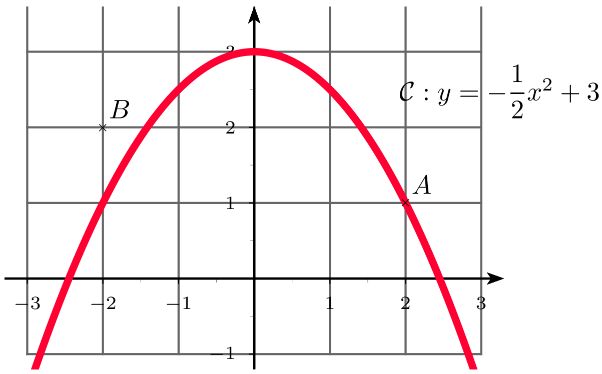


Attention :
Une lecture graphique ne donne que des valeurs approchées des images et antécédents recherchés sauf lorsque le codage indique la valeur exacte. Dans l'exemple ci-dessus, on a $f(-2) = -1$ et $f(3) = 2$ mais $f(-1) \simeq 0$.

Propriété:
Soit M un point de coordonnées $(a; b)$ avec $a \in D$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère :
Si $b = f(a)$, c'est à dire si $M(a; f(a))$, alors M appartient à $\mathcal{C}$, sinon M n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

Exemple:
La fonction $f : x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

- *Soit le point A de coordonnées $(2; 1)$.*
  $f(2) = -\frac{1}{2}2^2 + 3 = 1$ *donc le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}$.*
- *Soit le point B de coordonnées $(-2; 2)$.*
  $f(-2) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + 3 = 1$ *donc le point B n'appartient pas à la courbe $\mathcal{C}$.*



- *On dit que la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$. Cela signifie si $M(x; y)$ est un point du plan alors :*
  - $\boxed{\text{si}}$ *y est l'image de x par f* $\boxed{\text{alors}}$ *$M(x; y)$ est sur la courbe ;*
  - $\boxed{\text{si}}$ *le point $M(x; y)$ est sur la courbe* $\boxed{\text{alors}}$ *y est l'image de x par f ;*

  On dit alors que y est l'image de x par f $\boxed{\text{si et seulement si}}$ *$M(x; y)$ est sur la courbe.*