Exercices

Niveau 1 : La base, indispensable !

Exercice 1:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$,

1. Déterminer la nature de la fonction f.
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un encadrement de $f(x)$ pour x appartenant à :
   - $[0; 4]$;
   - $[-2; 3]$;
   - $[-3; 2]$;

Exercice 2:

1. Déterminer la nature de chacune des fonctions suivantes :
   - $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 4$
   - $f_2(x) = 4(x+5)^2$
   - $f_3(x) = -(2x+1)^2 + 4x^2$
2. Pour chacune des fonctions précédentes, calculer les images de -2 et de 2.
3. Déterminer les extremums de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$,

1. Déterminer la nature de la fonction f.
2. Déterminer l'image de $-\dfrac{3}{2}$ la fonction f.
3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer un encadrement de $f(x)$ pour x appartenenat à :
   - $[0; 4]$;
   - $[-2; 3]$;
   - $[-3; 12]$;

Niveau 2 : Des exercices de recherche de niveau seconde à maitriser !

Exercice 4:
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$,

1. Déterminer la nature de la fonction f.
2. Résoudre $f(x) < 5$.
3. Montrer que pour tout réel x, $\quad f(x) = -(x+1)(x-5)$.
4. En déduire le signe de f puis les antécédents de 0 par f.
5. Déterminer les variations de f. En déduire l'antécédent de 9 par f.
6. Développer $-(x-2)^2$. En déduire une nouvelle expression de $f(x)$.

Exercice 5:
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{21}{4}$,

1. Déterminer la nature de la fonction f.
2. Montrer que pour tout réel x, $\quad f(x) = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{7}{2}\right)$.
3. Montrer que pour tout réel x, $\quad f(x) = (x+1)^2 - \dfrac{25}{4}$.
4. On dispose à présent de trois expressions d'une même fonction f. Pour chacune des questions suivantes, choisir la forme la plus adapté.
   a. Résoudre algébriquement $f(x) = 0$.
   b. Résoudre algébriquement $f(x) < -\dfrac{21}{4}$.
   c. Résoudre algébriquement $f(x) \geq -\dfrac{25}{4}$.

Niveau 3 : En route vers la première !

Exercice 6:
Toute fonction polynôme du second degré $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\left(x+\alpha\right)^2 + \beta$ où α et β sont des nombres réels.

1. Montrer que $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ a pour forme canonique $f(x) = 2\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8}$.
2. Déterminer la forme canonique des fonctions polynômes du second degré suivantes :
   a. $f_1(x) = x^2 + x + 1$
   b. $f_2(x) = -3x^2 + 12x + 13$
   c. $f_3(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

Exercice 7:
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ et $g(x) = 4 - x$.

1. Tracer à l'aide de votre calculatrice C_f et D_g, les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. a. Déterminer les variations de la fonction f.
   b. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$
   c. Encadrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ au dixième près à l'aide de votre calculatrice.
   d. Montrer que $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{3}$ sont solutions de $f(x) = 0$.
   e. Déterminer a tel que pour tout réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
   f. En déduire le signe de $f(x)$.
3. a. Montrer que $f(x) - g(x) = (-x + 2)(x - 5)$
   b. En déduire les coordonnées des points d'intersection de C_f et D_g puis les positions relatives de ces deux courbes.

Exercice 8:
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -\dfrac{1}{3}x(x-1)$.

1. Déterminer la nature des fonctions f et g.
2. Déterminer les variations et le signe de f et g sur $\mathbb{R}$.
3. Soient C_f et D_g, les courbes représentatives des fonctions f et g. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et D_g puis les positions relatives de ces deux courbes.