Exercices

Exercice 3 feuille d'introduction

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2\right) + 2 \\ &= -2\left(x^2 - 4x + 4\right) + 2 \\ &= -2x^2 + 8x - 8 + 2 \\ &= -2x^2 + 8x - 6 \end{aligned}$$

f est une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 8$ et $c = -6$.

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} -2\left(x-1\right)\left(x-3\right) &= -2\left(x^2 - 3x - x + 3\right) \\ &= -2\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= -2x^2 + 8x - 6 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. On cherche les possibles antécédents de 6 par f :

$$\begin{aligned} f(x) = -6 &\iff -2x^2 + 8x - 6 = -6 \\ &\iff -2x^2 + 8x = 0 \\ &\iff x(-2x + 8) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \texttt{ou} \quad x = -2x + 8 \\ &\iff x \in \{0; 4\} \end{aligned}$$

4. Étudions le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.

5. On cherche les possibles antécédents de 2 par f :

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff -2\left(x-2\right)^2 + 2 = 2 \\ &\iff -2\left(x-2\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x-2\right)^2 = 0 \\ &\iff x - 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Niveau 1 : La base, à maitriser

Exercice 1:

1. f est une fonction du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -8$ et $c = 3$.
2. f est une fonction du second degré avec $a = -2 < 0$
   $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times (-2)} = -2$ et $f(-2) = 11$ donc f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		$\nearrow$	11	$\searrow$	

3. • Sur $[0; 4]$, f est décroissante :

x	0		4
f	3	$\searrow$	-61

   Si $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(4) \leqslant x \leqslant f(0)$ soit $-61 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

   • Sur $[-2; 3]$, f est décroissante :

x	-2		3
f	11	$\searrow$	-39

   Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(3) \leqslant x \leqslant f(-2)$ soit $-39 \leqslant f(x) \leqslant 11$.

   • Sur $[-3; 2]$, f est croissante, atteignant son maximum de 11 pour $x = -2$, puis elle est décroissante :

x	-3		-2		2
f	9	$\nearrow$	11	$\searrow$	-21

   Si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f(2) \leq f(x) \leq f(-2)$ soit $-21 \leqslant f(x) \leqslant 11$.

Exercice 2:

1. f_1 est une fonction du second degré avec $a = -2$, $b = 3$ et $c = 4$.

   $f_2(x) = 4(x^2 + 10x + 25) = 4x^2 + 40x + 100$. f_2 est une fonction du second degré avec $a = 4$, $b = 40$ et $c = 100$.

   $f_3(x) = -(4x^2 + 4x + 1) + 4x^2 = -4x^2 - 4x - 1 + 4x^2 = -4x - 1$. f_3 est une fonction affine avec $a = -4$ et $b = -1$.

2. $f_1(-2) = -2(-2)^2 + 3(-2) + 4 = -8 - 6 + 4 = -10$.
   $f_1(2) = -2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 4 = -8 + 6 + 4 = 2$.
   $f_2(-2) = 4(-2 + 5)^2 = 4 \times 3^2 = 36$.
   $f_2(2) = 4(2 + 5)^2 = 4 \times 49 = 196$.
   $f_3(-2) = -(2 \times (-2) + 1)^2 + 4(-2)^2 = -(-3)^2 + 4 \times 4 = -9 + 16 = 7$.
   $f_3(2) = -(2 \times 2 + 1)^2 + 4 \times 2^2 = -5^2 + 16 = -25 + 16 = -9$.
3. **Pour f_1 :**
   $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2 \times (-2)} = \dfrac{3}{4}$ et $f_1\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{41}{8}$.
   f_1 admet un maximum ($a = -2 < 0$) dont la valeur est $\dfrac{41}{8}$ mais n'admet pas de minimum.

   Pour f_2 :
   $f_2(x) = 4x^2 + 40x + 100$ et $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{40}{2 \times 5} = -5$.
   $f_2(-5) = 0$. f_2 admet un minimum ($a = 4 > 0$) dont la valeur est 0 mais n'admet pas de maximum.

   Pour f_3 :
   f_3 est une fonction affine donc elle n'admet pas de d'extremum.

Exercice 3:

1. f est une fonction du second degré avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 48$.
2. $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 3\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 24\left(-\dfrac{3}{2}\right) + 48 = \dfrac{363}{4}$.
3. f est une fonction du second degré avec $a = 3 > 0$.
   $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2 \times 3} = 4$ et $f(4) = 0$ donc f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4. 0 est le minimum de de f sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel x, $f(x)$ est positif.
5. • Sur $[0; 4]$, f est décroissante donc si : $0 \leqslant x \leqslant 4$, alors $f(4) \leqslant x \leqslant f(0)$ soit $0 \leqslant f(x) \leqslant 48$.

   • Sur $[-2; 3]$, f est décroissante donc si : $-2 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(3) \leqslant x \leqslant f(-2)$ soit $3 \leqslant f(x) \leqslant 108$.

   • Sur $[-3; 12]$, f est décroissante, atteignant son minimum de 0 pour $x = 4$, puis elle est croissante. De plus $f(-3) < f(12)$ donc si $-3 \leqslant x \leqslant 12$ alors $f(4) \leq f(x) \leq f(12)$ soit $0 \leqslant f(x) \leqslant 192$.

Niveau 2 : Des exercices de recherche de niveau seconde à maitriser !

Exercice 4:

1. f est une fonction du second degré avec $a = -1$, $b = 4$ et $c = 5$.
2. $f(x) < 5$ équivaut à $-x^2 + 4x + 5 < 5$ soit $-x^2 + 4x < 0$.
   Pour résoudre cette inéquation, on se ramène à une inéquation produit en factorisant par x.
   $x(-x + 4) < 0$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(-x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]4\ ;\ +\infty[$.
3. Pour tout réel x,
   $-(x+1)(x-5) = -(x^2 - 5x + x - 5) = -x^2 + 4x + 5 = f(x)$.
4. On a :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$-(x+1)(x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   La dernière ligne du tableau nous donne le signe de f et nous indique que les antécédents de 0 sont donc -1 et 5.
5. f est une fonction du second degré avec $a = -1 < 0$.
   $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \times (-1)} = 2$ et $f(2) = 9$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\nearrow$	9	$\searrow$

   On en déduit que 2 est l'unique antécédent de 9 par f
6. $-(x-2)^2 = -(x^2 - 4x + 4) = -x^2 + 4x - 4$. Donc $f(x) = -x^2 + 4x - 4 + 9 = -(x-2)^2 + 9$.
   Note : Cette nouvelle forme de l'expression de f est appelée forme canonique[1].

Exercice 5:

1. f est une fonction du second degré avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -\dfrac{24}{4}$.
2. $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{7}{2}\right) = x^2 + \dfrac{7}{2}x - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{21}{4} = x^2 + 2x - \dfrac{21}{4} = f(x)$.
3. $(x+1)^2 - \dfrac{25}{4} = x^2 + 2x + 1 - \dfrac{25}{4} = x^2 + 2x - \dfrac{21}{4} = f(x)$.
4. a. **On va utiliser la deuxième forme de f pour se ramener à une équation produit nul.**
   $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{7}{2}\right) = 0$. Les solutions sont donc $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{7}{2}$.

   b. **On va utiliser l'expression de départ de f :**
   $x^2 + 2x - \dfrac{21}{4} < -\dfrac{21}{4}$ équivaut à $x^2 + 2x < 0$.
   Pour résoudre cette inéquation, on se ramène à une inéquation produit en factorisant par x.
   $x(x+2) < 0$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} =]-2\ ;\ 0[$.

1. Au programme de première

c. **On va utiliser la troisième forme de f :**
$(x+1)^2 - \dfrac{25}{4} \geqslant -\dfrac{25}{4}$ équivaut à $(x+1)^2 \geqslant 0$.
Or $(x+1)^2$ est le carré de $x+1$ donc $(x+1)^2 \geq 0$ pour tout réel x.

Ainsi, $(x+1)^2 - \dfrac{25}{4} \geqslant -\dfrac{25}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Niveau 3 : En route vers la première !

Exercice 6:

1. Il suffit de développer $2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8}$ et on obtient : $2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8} = 2x^2 - 5x + 3$

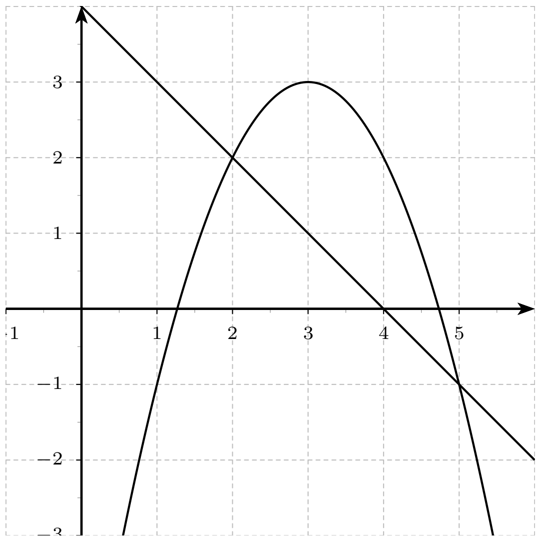
2. a. $f_1(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

   b. $f_2(x) = -3\,(x-2)^2 + 25$

   c. $f_3(x) = \dfrac{1}{2}\,(x+2)^2$

Exercice 7:

1. On observe pour $-1 \leq x \leq 6$ et $-3 \leq y \leq 4$:



2. a. f est une fonction polynôme du seconde degré avec $a=-1$, $b=6$ et $c=-6$.
$-\dfrac{b}{2a} = 3$, $f(3) = 3$ et $a<0$ donc f admet le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

   b. $f(3) > 0$ et la parabole de f est tournée vers le bas donc $f(x) = 0$ admet deux solutions.

   c. Si on note x_1 et x_2 ces solutions avec $x_1 < x_2$ on a à l'aide du tableau de valeurs de f :
$$1,2 < x_1 < 1,3$$
et
$$4,7 < x_2 < 4,8$$

   d. Il suffit de montrer (pas à la calculatrice) que $f\left(3-\sqrt{3}\right) = 0$ et $f\left(3+\sqrt{3}\right) = 0$.
Attention, à ne pas faire d'erreur en développant $\left(3-\sqrt{3}\right)^2$ et $\left(3+\sqrt{3}\right)^2$!

e. Pour tout réel x,

$$\begin{array}{rcl} a(x-x_1)(x-x_2) & = & a\left[x-\left(3-\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(3+\sqrt{3}\right)\right] \\ & = & a\left(x-3+\sqrt{3}\right)\left(x-3-\sqrt{3}\right) \\ & = & a\left[(x-3)^2-\sqrt{3}^2\right] \\ & = & a\left(x^2-6x+9-3\right) \\ & = & a\left(x^2-6x+6\right) \\ & = & ax^2-6ax+6a \end{array}$$

Ainsi $f(x)=ax^2-6ax+6a$ pour $a=-1$ et donc pour tout réel x, $f(x)=-\left(x-3+\sqrt{3}\right)\left(x-3-\sqrt{3}\right)$.

f. Signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$		$+\infty$
-1		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-3+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3-\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. a. Pour tout réel x,

$$\begin{array}{rcl} f(x)-g(x) & = & -x^2+6x-6-(4-x) \\ & = & -x^2+6x-6-4+x \\ & = & -x^2+7x-10 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} (-x+2)(x-5) & = & -x^2+5x+2x-10 \\ & = & -x^2+7x-10 \end{array}$$

On en déduit que pour tout réel x, $f(x)-g(x)=(-x+2)(x-5)$.

b. Pour déterminer les points d'intersections des deux courbes, on résout $f(x)=g(x)$ soit $f(x)-g(x)=0$ donc :

$$\begin{array}{rcl} f(x)=g(x) & \iff & (-x+2)(x-5)=0 \\ & \iff & x\in\{2;5\} \end{array}$$

Or $f(2)=g(2)=2$ et $f(5)=g(5)=-1$ donc C_f et D_g s'intersectent en $A(2;2)$ et $B(5;-1)$.

Pour étudier les positions relatives des deux courbes, on compare $f(x)$ et $g(x)$ ce qui revient à étudier le signe de $f(x)-g(x)$ donc :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$-x+2$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que C_f est au dessus de D_g sur $[2;5]$ et au dessous sur $]-\infty;2]$ et sur $[5;+\infty[$.

Exercice 8:

1. f est une fonction polynôme du seconde degré avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$.
   Pour tout réel x, $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x$ donc g est une fonction polynôme du seconde degré avec $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = 0$.
2. Variations de f :
   $-\dfrac{b}{2a} = 0$, $f(0) = -1$ et $a > 0$ donc f admet le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

   Variations de g :
   $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{12}$ et $a < 0$ donc g admet le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	

3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 1 + \frac{1}{3}x(x-1) \\ &= (x-1)(x+1) + \frac{1}{3}x(x-1) \\ &= (x-1)\left(x + 1 + \frac{1}{3}x\right) \\ &= (x-1)\left(\frac{4}{3}x + 1\right) \end{aligned}$$

   Pour déterminer les points d'intersections des deux courbes, on résout $f(x) = g(x)$ soit $f(x) - g(x) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff (x-1)\left(\frac{4}{3}x + 1\right) = 0 \\ &\iff x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\} \end{aligned}$$

   Or $f(1) = g(1) = 0$ et $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = g\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{7}{16}$ donc C_f et D_g s'intersectent en $A(1;0)$ et $B\left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{7}{16}\right)$.

   Pour étudier les positions relatives des deux courbes, on compare $f(x)$ et $g(x)$ ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - g(x)$ donc :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4}{3}x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On en déduit que C_f est au dessous de D_g sur $\left[-\dfrac{3}{4}; 1\right]$ et au dessus sur $\left]-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$ et sur $[1; +\infty[$.