

# Parallélisme dans l'espace

## 1 Notion de plan dans l'espace

Par trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non-alignés de l'espace passe un unique plan. Ce plan est noté  $(ABC)$ . On dit ainsi que **trois points non-alignés déterminent un plan**.

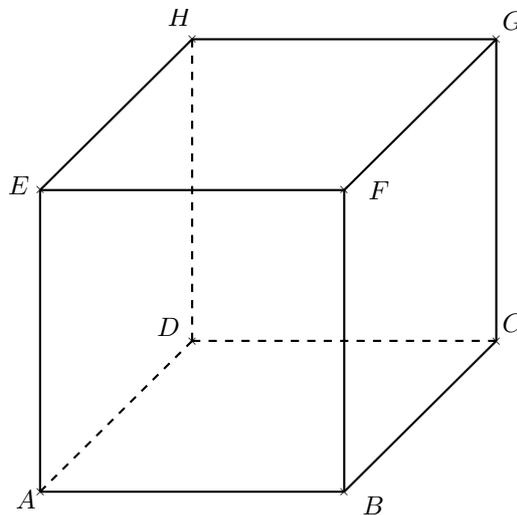
## 2 Plans

**Définition:**

- Deux plans sont dits **parallèles** s'ils n'ont aucun point commun ou s'ils sont confondus.
- Deux plans non-parallèles sont dits **sécants** et leur intersection est une droite.

**Exercice 1:**

Dans le cube ci-dessous, citer trois couples de plans sécants et trois couples de plans parallèles.



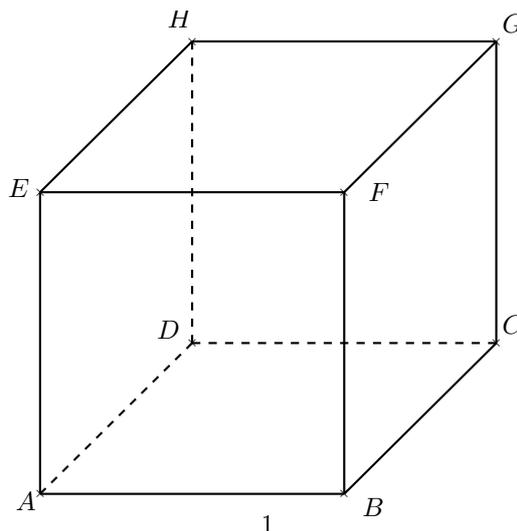
## 3 Plan et droite

**Définition:**

- Un plan et une droite sont dits **parallèles** s'ils n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan.
- Un plan et une droite non-parallèles sont dits **sécants** et leur intersection est un point.

**Exercice 2:**

Dans le cube ci-dessous, citer trois couples (droite,plan) sécants et trois couples (droite,plan) parallèles.



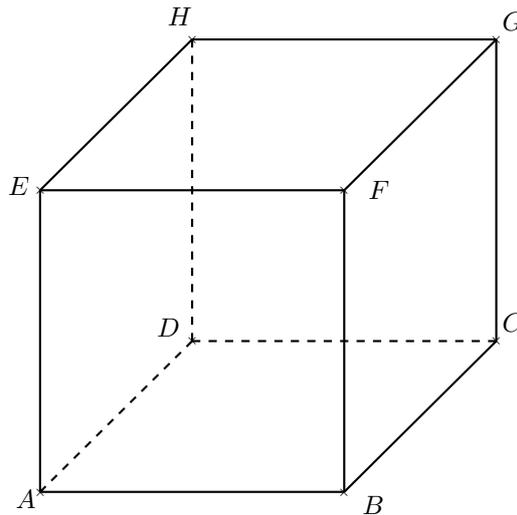
## 4 Droites

### Définition:

- Deux droites sont dites **coplanaires** si elles sont contenues dans un même plan.
- Deux droites sont dites **sécantes** si leur intersection est un point  $\boxed{\text{et}}$  elles sont alors coplanaires.
- Deux droites sont dites **parallèles** si elles sont coplanaires  $\boxed{\text{et}}$  n'ont aucun point commun.
- Deux droites non-coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

### Exercice 3:

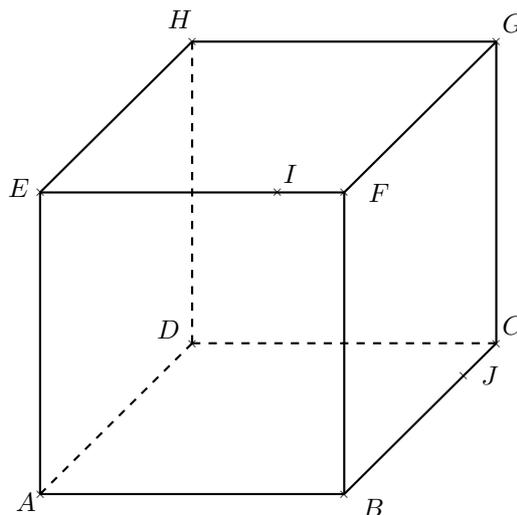
Dans le cube ci-dessous, citer trois couples de droites sécantes, trois couples de droites parallèles et trois couples de droites non-coplanaires.



## 5 Un peu d'exercice

### Exercice 4:

$ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  un point du segment  $[EF]$  et  $J$  un point du segment  $[BC]$ .

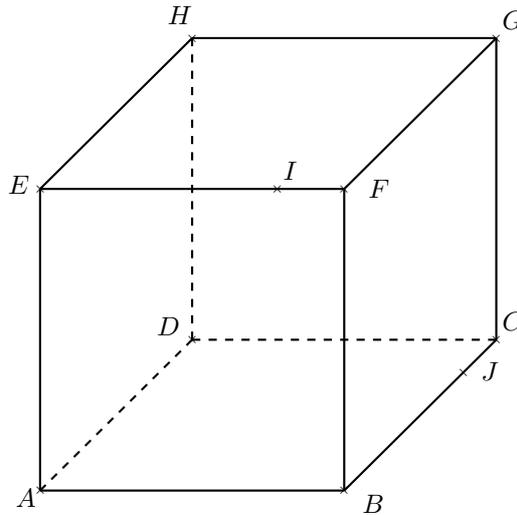


Recopier et compléter les phrases ci-dessous. Préciser, lorsqu'elle existe, l'intersection des deux ensembles.

1. Les plans  $(BFG)$  et  $(GJC)$  sont ...
2. Les plans  $(EHI)$  et  $(ABC)$  sont ...
3. Les plans  $(ADF)$  et  $(BCG)$  sont ...
4. Les plans  $(IJB)$  et  $(ABC)$  sont ...
5. La droite  $(AC)$  et le plan  $(DBF)$  sont ...
6. La droite  $(GC)$  et le plan  $(ADH)$  sont ...

**Exercice 5:**

$ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  un point du segment  $[EF]$  et  $J$  un point du segment  $[BC]$ .



Recopier et compléter les phrases ci-dessous. Préciser, lorsqu'elle existe, l'intersection des deux ensembles.

- |   |  |
|---|--|
| 1. La droite $(AI)$ et le plan $(EFB)$ sont ... | 4. Les droites $(DB)$ et $(HF)$ sont ... |
| 2. La droite $(AI)$ et le plan $(BCG)$ sont ... | 5. Les droites $(AI)$ et $(DC)$ sont ... |
| 3. Les droites $(EG)$ et $(IH)$ sont ...        | 6. Les droites $(AI)$ et $(HG)$ sont ... |

## 6 Quelques théorèmes

**Théorème:**

- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.
- Si une droite  $d_1$  est parallèle à une droite  $d_2$ , alors  $d_1$  est parallèle à tout plan  $\mathcal{P}$  qui contient  $d_2$ .
- Si deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}_1$  sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}_2$ , alors les plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles.
- Si deux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont parallèles alors tout plan  $\mathcal{P}_3$  qui coupe  $\mathcal{P}_1$  coupe  $\mathcal{P}_2$  et les intersections sont deux droites  $d_1$  et  $d_2$  parallèles.

**Exercice 6:**

Pour chacun des théorèmes ci-dessus, faire un dessin le représentant.

**Exercice 7:**

Soit  $SABCD$  une pyramide dont la base  $ABCD$  est un parallélogramme. On nomme  $A'$  le milieu du segment  $[SA]$ ,  $B'$  le milieu du segment  $[SB]$  et  $C'$  le milieu du segment  $[SC]$ .

- Dessiner  $SABCD$  en perspective cavalière et placer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .
- Démontrer que les droites  $(A'B')$  et  $(DC)$  sont parallèles.
- Démontrer que les plans  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$  sont parallèles.

**Exercice 8:**

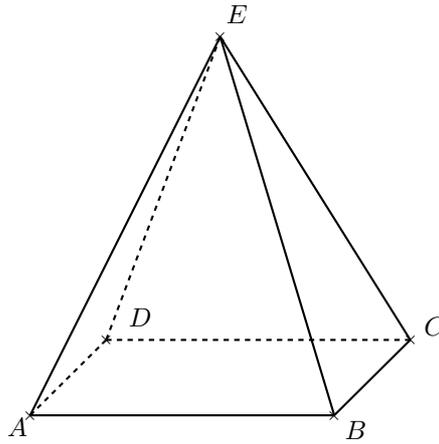
Soit  $ABCD$  un tétraèdre. On nomme  $A'$  le point tel que  $\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$  et  $B'$  le point tel que  $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ .

- Dessiner  $ABCD$  en perspective cavalière et placer les points  $A'$  et  $B'$ .
- Démontrer que la droite  $(A'B')$  est parallèle au plan  $(BCD)$ .
- Placer le point  $C'$  sur le segment  $[AD]$  tel que le plan  $(A'B'C')$  soit parallèle au plan  $(BCD)$ .

**Exercice 9:**

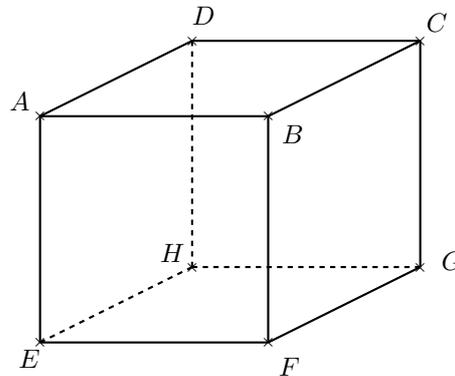
Soit  $ABCDE$  une pyramide régulière à base rectangulaire tel que  $AE = 8$  cm,  $AB = 4$  cm et  $AD = 2$  cm.

1. Placer le point  $F$  tel  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ .
2. Tracer la parallèle à  $(AB)$  passant par  $F$ , elle coupe  $(EB)$  en  $G$ .
3. Tracer la parallèle à  $(AD)$  passant par  $F$ , elle coupe  $(ED)$  en  $H$ .
4. Déterminer la position relative des plans  $(ABC)$  et  $(FGH)$ .
5. Déterminer le point d'intersection du plan  $(FGH)$  et de la droite  $(EC)$ . On le note  $K$ .
6. Déterminer le volume de la pyramide  $ABCDE$ .
7. Déterminer le rapport des volumes des pyramides  $ABCDE$  et  $FGKHE$ .
8. En déduire le volume de la pyramide  $FGKHE$ .



**Exercice 10:**

Soit  $ABCDEFGH$  un cube.



1. Placer le point  $I$ , intersection des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ .
2. Placer le point  $J$  tel que  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ .
3. Tracer l'intersection du plan  $(JAD)$  avec le cube  $ABCDEFGH$ .