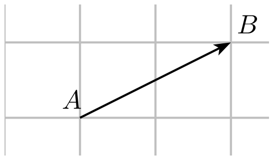
Chapitre 1: Vecteurs I

1 Notion de vecteur

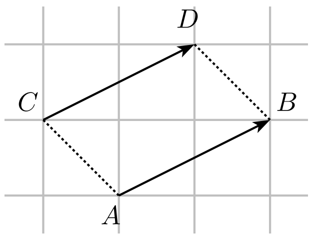
Définition:
Soit A et B deux points distincts du plan, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- *sa direction : celle de la droite (AB) et de toutes les droites parallèles à (AB) ;*
- *son sens : de A vers B ;*
- *sa norme : la distance AB que l'on note $\|\overrightarrow{AB}\|$.*



Remarque:
Si A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ s'appelle le vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$.
Le vecteur n'a ni direction ni sens, sa norme est égale à 0.

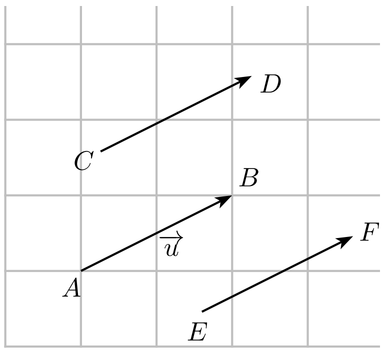
Définition:
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si
D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Conséquences :

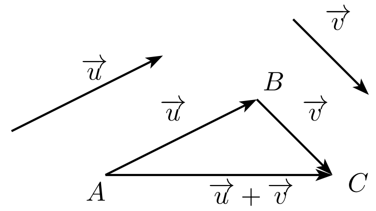
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ non-nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (qui peut-être aplati).

Remarque:
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan, on peut tracer à partir de n'importe quel point du plan un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{u}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a une infinité de représentants !



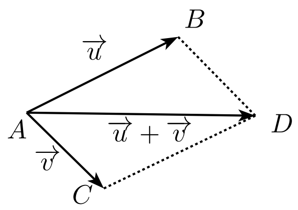
2 Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ que l'on peut représenter de l'une des deux manières suivantes :



Si on choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ représente le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$. On en déduit la propriété suivante :

Relation de Chasles Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Si on choisit un point A quelconque, on place les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v}$, alors le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.

Règle du parallélogramme Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ où D est tel que $ABDC$ soit un parallélogramme éventuellement aplati.

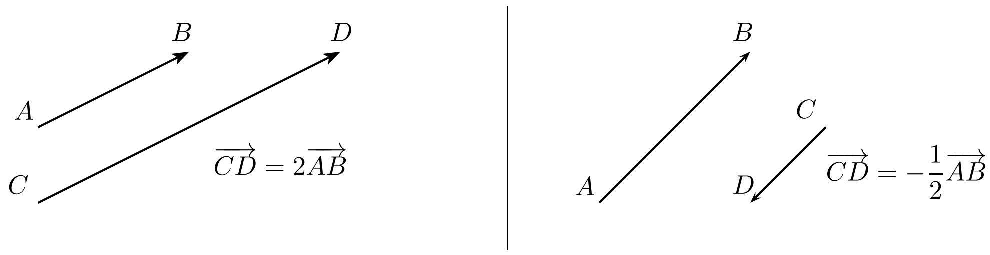
3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition:
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul du plan et k un nombre réel non-nul :

- *Le vecteur $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ a même direction que $\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que $(AB)\backslash\backslash(CD)$*

si $\boxed{k>0}$	*si* $\boxed{k<0}$
• $\overrightarrow{CD}$ *a même sens que* $\overrightarrow{AB}$	• $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont de sens contraire*
• $CD=k\times AB$	• $CD=-k\times AB$

Exemples:
Voici deux exemples avec $k=2$ et $k=-\dfrac{1}{2}$



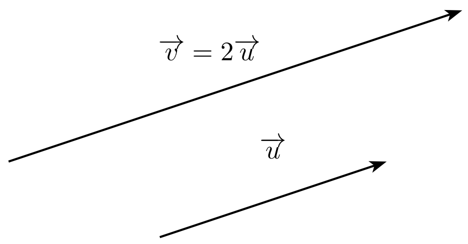
Remarques:
- *Si $k=0$ ou si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ alors $k\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$.*
- *Si $k=-1$:*
  - *On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AB}$ sont opposés ;*
  - *Le vecteur qui a même norme et même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais qui a le sens opposés est le vecteur $\overrightarrow{BA}$ donc :*

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$$

4 Vecteurs colinéaires

Définition:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple:
$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ *donc* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires.*



Remarque:
Le vecteur nul est donc colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété:
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont deux vecteurs non-nuls, on a les équivalences suivantes :

(AB) et (CD) sont parallèles	$\Leftrightarrow$	*$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires*	$\Leftrightarrow$	*il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$*

Propriété:
Trois points distincts du plan A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve :
A, B et C sont alignés et distincts $\Leftrightarrow (AB)\backslash\backslash(AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires