Comptons les morceaux !

MATHS EN JEAN 2012/2013

Comptons les morceaux !

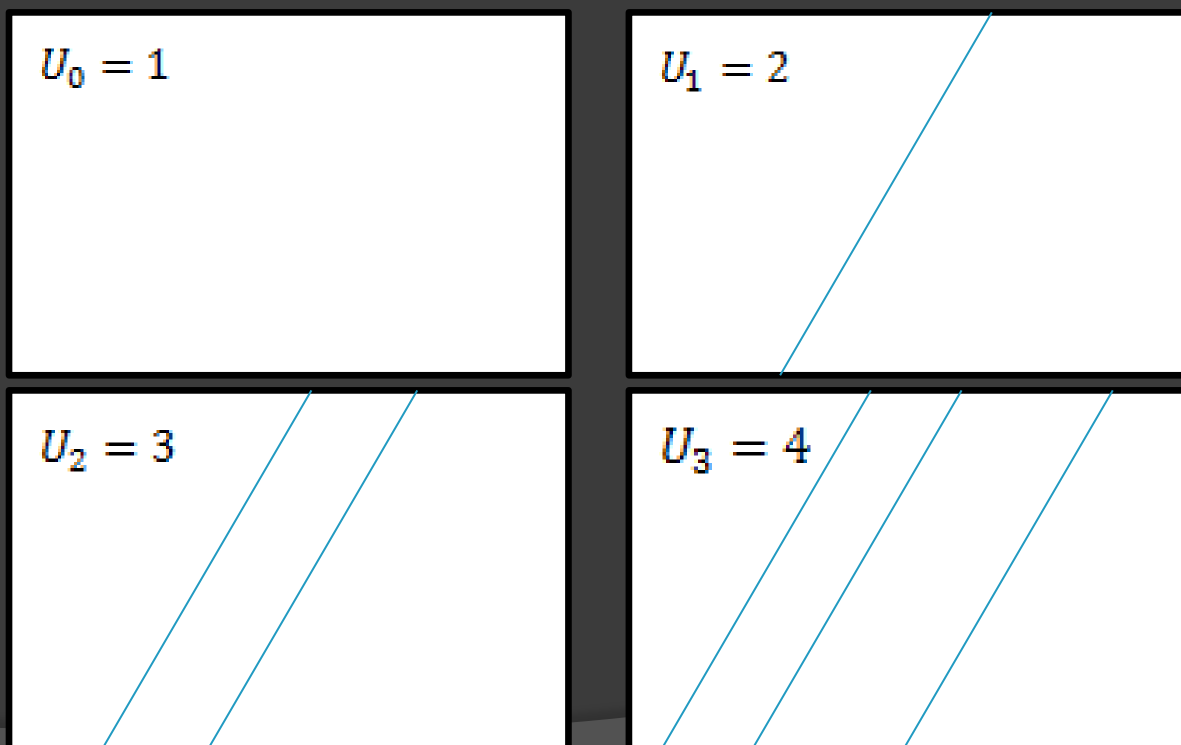
Découpage en 2 dimensions

Problématique

- Etant données n droites distinctes dans un plan, on se demande combien de zone elles peuvent découper dans le plan en 2D.
- On pose le même problème pour le découpage d’un espace 3D par des plans

Rayures

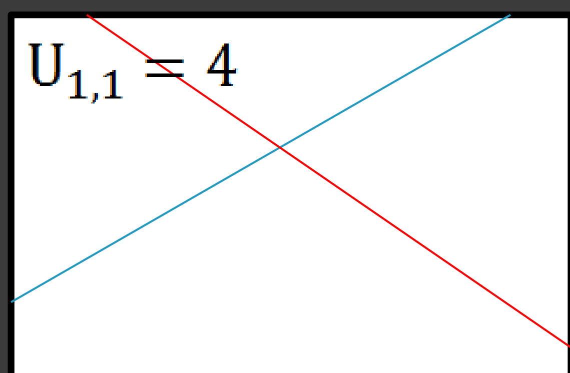
- On pose :
  - n le nombre de droite(s) parallèle(s)
  - (Un) le nombre **maximal** de zone(s)

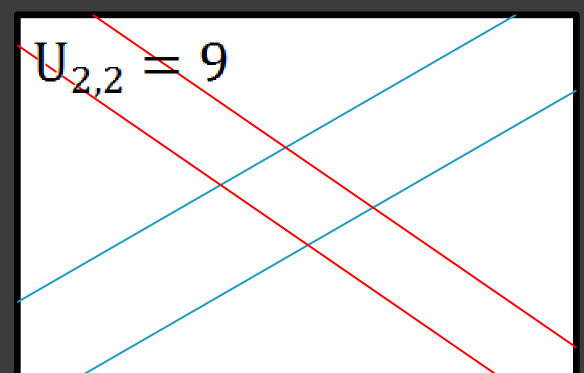


$$\boxed{U_n = n + 1}$$

Quadrillages

- On pose :
  - n le nombre de droite(s) parallèle(s)
  - p le nombre de droite(s) parallèle(s) coupant les n droite(s) ci-dessus
  - Un,p le nombre **maximal** de zone(s)

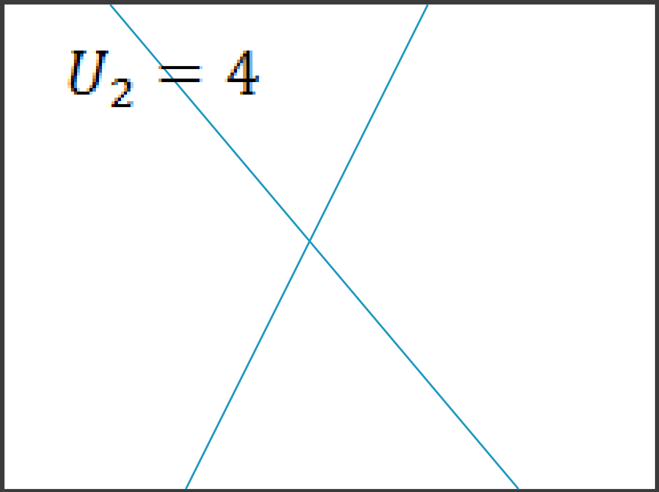


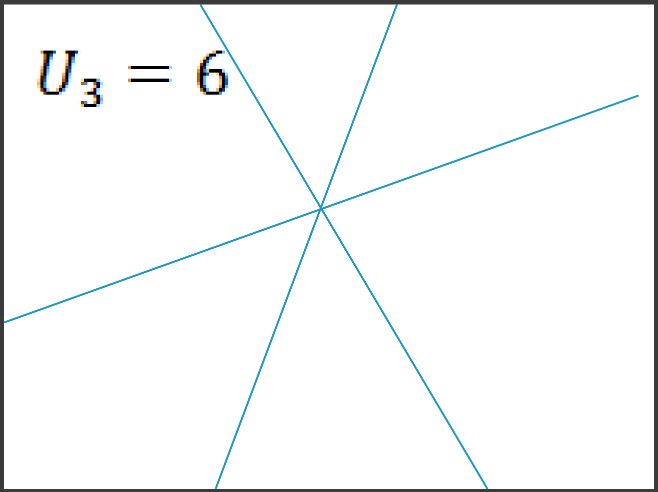


$$U_{n,p} = (n+1)(p+1)$$

Etoile

- On pose :
  - n le nombre de droite(s)
  - Un le nombre maximal de zone(s)





On a la suite par récurrence : $U_{n+1} = U_n + 2$ avec U1=2

On en déduit la suite explicite : $U_n = 2n$

Formule par récurrence

Démonstration :

On a n droites qui ne sont pas parallèles entre elles. On admet une nouvelle droite (parallèle à aucune autre) qui coupe toutes les n droites avec n points d'intersections au total. La nouvelle droite traverse donc n+1 zones (au maximum, c'est-à-dire sans passer par un point d'intersection déjà existant). Comme elle les traverse, elle les coupe. Cette droite ajoute donc n+1 zones de par son existence.

On a donc la formule de récurrence : $\boxed{\mathrm{U}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{U}_{\mathrm{n}} + (n+1)}$

Formule explicite

Démonstration par récurrence :

On a la suite $U_{n+1} = U_n + (n+1)$ avec n un nombre entier naturel et $U_0 = 1$. Soit P_n la proposition $U_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$. On veut montrer que P_n est vraie

Initialisation :

Pour n=1, $U_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2 \qquad U_1 = U_0 + (0+1) = 2$

Pour n=2, $U_2 = \frac{2(2+1)}{2} + 1 = 4 \qquad U_2 = U_1 + (1+1) = 4$

Hérédité : On suppose P_n vraie. On veut montrer que P_n est héréditaire.

$$U_{n+1} = Un + (n+1)$$

$$U_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1)$$

$$U_{n+1} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} + 1$$

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

D'après le raisonnement par récurrence, P_{n+1} et P_n sont vraies. On en conclut que P_n est vraie pour tout entier n.

Comptons les morceaux !

Découpage en 3 dimensions

Quadrillage 3D

- On pose :
  - n le nombre de plan(s) parallèle(s) entre eux
  - m le nombre de plan(s) parallèle(s) entre eux coupant les n plans
  - p le nombre de plan(s) parallèle(s) entre eux coupent les n et m plans
  - Un,m,p le nombre de zones

$$\boxed{U_{n,m,p} = (n+1)(m+1)(p+1)}$$

Demi-chaos

- On pose :
  - n le nombre de plan(s) non parallèle(s) dans la même direction
  - p le nombre de plan(s) parallèle(s) dans une direction différente des n premiers plans
  - Un,p le nombre de zones

$$U_{n,p} = (p+1)\left(\frac{n(n+1)}{2} + 1\right)$$

Double hélice

- Soient deux axes a et b se coupant en un point, avec n le nombre de plans en rotation autour de a et m le nombre de plan autour de b.
- En rappelant le « principe de l'étoile » n plans découpent 2n zones (en 2D).
- Ainsi, les plans de l'axe a découpent 2n zones. Quand on ajoute l'axe b, on remarque qu'il découpe deux zones particulières, chacune redécoupée en 2n zones par m plans autour de l'axe b. Il reste donc (2n-2) zones, non-découpées, qui sont chacune découpées en (n+1) zones.
- Par addition, on obtient la formule suivante :

$$U_{n,m} = 2(nm + n + m - 1)$$