

GIBERT Alexia
HEMMERLE Lionel
Année 2012-2013
2^{nde}

MATh.en.JEANS

Celui qui prend le dernier pion a gagné

Le jeu des allumettes est une variante du jeu des bâtonnets de Fort Boyard, où on introduit plusieurs lignes.

On est devant une situation (avec un nombre de lignes et un nombre d'allumettes déterminés), on appelle "joueur 1" celui qui va jouer immédiatement, et "joueur 2" l'autre.

- Soit le joueur 1 est sûr de gagner, quoi que fasse le joueur 2 ; la situation est alors dite gagnante

- Soit le joueur 2 est sûr de gagner, quoi que fasse le joueur 1 ; la situation est alors dite perdante.

Nous avons cherché à savoir quelles situations étaient gagnantes, lesquelles étaient perdantes, et les différentes stratégies à adopter.

Nous sommes parvenus à trouver les solutions, et donc les stratégies à adopter, dans toutes les situations, lorsque nous pouvions enlever une, deux ou trois allumettes par tour.

Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot, chercheur à la faculté des sciences d'Angers

Lycée Guy Moquet, Chateaubriant

Sommaire :

I) But et règles du jeu.....p3

II) Une seule ligne

A) Cas simple.....p3-4

B) Cas complexe.....p4-5

C) Conclusion.....p5

III) Plusieurs lignes

A) Définition.....p6

B) n_1, n_2 et n_3 sont pairs.....p6-7

C) n_1, n_2 et n_3 sont impairs.....p7

D) Un des n_i est impair.....p7-8

E) Deux des n_i sont impairs..p8-9

F) Conclusion.....p9

IV) Conclusion générale.....p9-10

I) But et règles du jeu

2

But du jeu :

Le jeu des allumettes se joue à deux.
Le joueur qui a gagné est celui qui prend la dernière allumette du jeu.

Règles du jeu :

Les joueurs ont devant eux une ou plusieurs lignes d'un nombre quelconque d'allumettes et jouent tour à tour. Ils ont la possibilité de prendre une, deux, ou trois allumettes par tour. Ils ne peuvent jouer que dans une ligne d'allumettes à chaque tour, mais peuvent changer de ligne d'un tour sur l'autre.

II) Une seule ligne

A) Cas simple

On dit que le cas est simple lorsque le nombre d'allumettes dans la ligne est un multiple de quatre.

Cette situation est perdante car :

- si le **joueur 1** supprime une allumette, le **joueur 2** supprime trois allumettes;
- si le **joueur 1** supprime deux allumettes, le **joueur 2** supprime deux allumettes;
- si le **joueur 1** supprime trois allumettes, le **joueur 2** supprime une allumette.

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'allumettes sur la ligne. Le **joueur 2** gagne donc forcément dans

3

cette situation, en suivant cette stratégie.

À partir de cette stratégie, notre analyse des autres situations reposera sur le fait que nous répartissons chaque ligne en paquets de quatre, et que nous ne tiendons alors compte que du nombre d'allumettes ne se trouvant pas dans ces paquets de quatre.

B) Cas complexe

On a un cas complexe si le nombre de bâtonnets dans la ligne n'est pas un multiple de quatre

Cette situation est gagnante car :

Nous avons vu dans le II) A) qu'une fois qu'on avait une situation avec un nombre d'allumettes multiple de quatre, le joueur commençant à jouer sur ces groupes de quatre avait forcément perdu. Lorsque le nombre d'allumettes n'est pas un multiple de quatre, nous avons trois possibilités différentes :

- Une allumette reste en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a treize allumettes, nous avons donc trois groupes de quatre et une allumette en plus)
- Deux allumettes restent en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a dix allumettes, nous avons donc deux groupes de quatre et deux allumettes en plus)
- Trois allumettes restent en plus des groupes de quatre formés (exemple : il y a dix-neuf allumettes, nous avons

4

donc quatre groupes de quatre et trois allumettes en plus)

Dans ce cas là, le **joueur 1** cherche à ramener à une situation gagnante, donc à une situation où après son tour il ne reste plus que des groupes de quatre. Il va donc enlever une, deux ou trois allumettes, en fonction de combien il y en a en plus des groupes de quatre. Il sera ainsi sûr de gagner étant donné qu'il ne restera plus que des groupes de quatre et que ce sera au **joueur 2** de jouer.

C) Conclusion

En conclusion, lorsque nous n'avons qu'une seule ligne d'allumettes :

- si la situation est un multiple de 4, la situation est perdante car quoi que fasse le joueur, il met son adversaire devant une situation avec un nombre d'allumettes non multiple de quatre.

- si la situation n'est pas un multiple de quatre, la situation est gagnante car le joueur a toujours une solution pour mettre son adversaire devant un nombre d'allumettes multiple de quatre.

III) Plusieurs lignes

A) Définition

- n_1 désigne le nombre de lignes comprenant une allumette en plus des groupes de quatre ;

- n_2 désigne le nombre de lignes comprenant deux allumettes en plus des groupes de quatre ;

- n_3 désigne le nombre de lignes comprenant trois allumettes en plus des groupes de quatre.

B) Dans le cas où n_1 , n_2 et n_3 sont pairs

Cette situation est perdante car :

Dans cette situation, le nombre de lignes ayant une allumette en plus des groupes de quatre est pair, ainsi que le nombre de lignes en ayant deux, et celui en ayant trois. On peut donc regrouper les lignes deux par deux, afin d'obtenir des situations symétriques entre les chaque ligne. À partir de cette situation, le **joueur 2** est sûr de gagner s'il joue en symétrie par rapport au **joueur 1** (donc s'il joue dans un ligne ayant le même nombre d'allumettes en plus que celle du joueur 1, et s'il enlève le même nombre d'allumettes que l'autre joueur à chaque tour).

Remarque : Ce principe est valable même si le nombre de paquets de quatre n'est pas égal dans les deux lignes, étant donné qu'on sait comment les éliminer en étant le joueur 2. Seules les allumettes en plus des groupes de quatre comptent donc.

C) Dans le cas où n_1 , n_2 et n_3 sont impairs

Cette situation est perdante car :

Ici, le nombre de lignes ayant une allumette en plus des groupes de quatre est impair, ainsi que le nombre de lignes en ayant deux, et celui en ayant trois.

Dans cette situation, peu importe ce que jouera le **joueur 1**, le joueur 2 pourra toujours ramener à une situation symétrique. Il n'aura alors plus qu'à jouer en symétrie par rapport au joueur 1, et sera sûr de gagner.

D) Dans le cas où un des n_i est impair

Cette situation est gagnante car :

Dans cette situation, où un des n_i est impair, les deux autres n_i sont pairs. On peut donc y jouer en symétrie. On cherche alors à savoir comment ramener le n_i impair à une situation que l'on sait résoudre, c'est à dire à une situation symétrique ou à une situation où il n'y a que des groupes de quatre. Le plus simple va être de ramener à une situation symétrique.

En effet, le joueur 1 va pouvoir y arriver facilement, en supprimant les allumettes qui dépassent dans une de ces lignes. Ainsi, n_i sera pair, et on pourra y jouer en symétrie. Le joueur 1 gagnera donc forcément, car ce sera au tour du joueur 2.

→ Exemple : Si n_1 et n_2 sont pairs, et n_3 est impair : le joueur 1 va enlever trois allumettes dans une des lignes ayant trois allumettes en plus des groupes de quatre. Cette ligne sera alors composée uniquement de groupes de quatre, et le nombre de n_3 restant sera pair. Ce sera alors au joueur 2 de jouer, et le joueur 1 pourra jouer en symétrie par rapport à lui ou bien supprimer les groupes de quatre.

E) Dans le cas où deux des n_i sont impairs

Cette situation est gagnante car :

Nous sommes dans une situation où un des n_i est pair. On peut donc y jouer en symétrie. Les deux autres n_i sont impairs. On cherche comment ramener à une situation symétrique. Le **joueur 1** pourra y parvenir, en transformant une des lignes appartenant à un n impair.

→ Exemple : Si n_1 et n_2 sont impairs, et n_3 est pair : Le **joueur 1** va enlever une allumette dans une ligne comportant deux allumettes en plus. Ainsi cette ligne ne fera plus partie des n_2 mais des n_1 , et on pourra jouer

en symétrie dans chacun des groupes étant donné qu'ils seront devenus pairs. Ce sera alors au tour du **joueur 2**, qui va forcément perdre si le **joueur 1** suit la stratégie de la symétrie.

F) Conclusion

En conclusion, lorsque nous avons plusieurs lignes d'allumettes :

- si les trois nombres n_1 , n_2 , n_3 sont tous pairs, ou tous impairs, alors la situation est perdante,
- si un ou deux de ces nombres exactement est impair, alors la situation est gagnante

IV) Conclusion générale

Nous sommes donc parvenus à trouver l'ensemble des solutions lorsque les joueurs peuvent prendre une, deux ou trois allumettes.

Nous nous sommes donc ensuite demandé si nos solutions étaient également valables pour une variante des règles consistant à pouvoir prendre plus de trois allumettes par tour.

Nous avons ainsi pu constater que les cas simples fonctionnent, seulement le nombre d'allumettes par paquets varie selon le nombre maximal d'allumettes que l'on peut prendre.

Par exemple, si l'on peut prendre jusqu'à six allumettes, on devra faire des paquets de sept, selon le même principe que les paquets de quatre expliqué ici. Les cas simples seront donc, si on peut prendre jusqu'à six allumettes, lorsque le nombre d'allumettes est un multiple de sept.

Nous avons ensuite constaté que le principe de la symétrie marche exactement de la même façon, quel que soit le nombre d'allumettes que l'on soit autorisé à prendre.