Recollons les morceaux

BOUDET Corentin (TS)
TRIMOREAU Vincent (TS)
PARIS Nicolas (TS)

Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot, chercheur à la faculté des sciences d'Angers

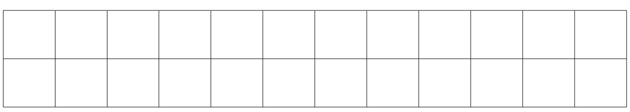
Lycée Guy Moquet, Chateaubriant

Prenons deux polygones A et B dans le plan. On veut découper A en plusieurs petits polygones, et recoller ces petits polygones pour obtenir B. On comprend facilement qu'il est nécessaire que A et B aient la même aire. On utilise ainsi cette méthode de découpage pour démontrer le théorème de Pythagore.
La question qui se pose est de savoir si, étant donné deux polygones de même aire, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement, et si oui, comment ?

Sommaire:

1) Introduction

Prenons un exemple simple: un rectangle de douze unités de longueur et de deux unités de largeur (fig.1). Il peut être découpé en deux rectangle de six unités de longueur et de deux unités de largeur que l'on colle afin d'obtenir un rectangle de six unités de longueur et de quatre unités de largeur.

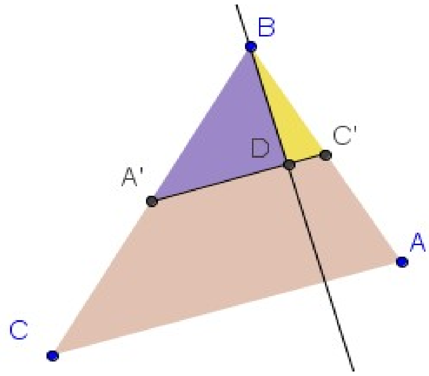


(fig.1)

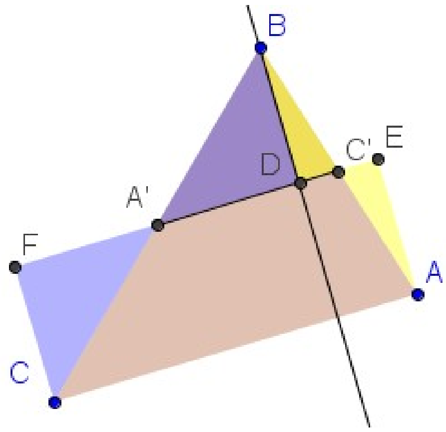
On a de façon assez simple découpé un rectangle pour obtenir un rectangle de dimension différentes et de même aire.

2) Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire?

Pour réaliser le découpage, on doit d'abord tracer la droite qui passe par le milieu de deux des côtés du triangle puis tracer la hauteur issue du sommet opposé au dernier côté du triangle.



Cette hauteur intersecte [A'C'] en D et les triangles A'BD et C'BD sont rectangles en D.



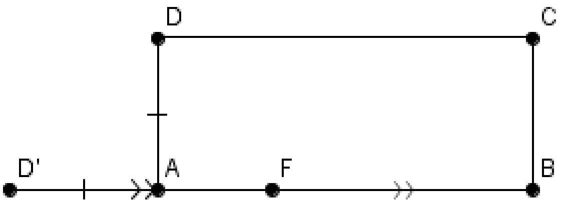
On trace ensuite le symétrique du triangle A'BD par la symétrie de centre A'. Comme A' est le milieu de [BC], C est le symétrique de B. Le symétrique de D est noté F et par propriété de la symétrie centrale, l'angle $\widehat{A'FC}$ est droit. On trace de même le symétrique du triangle C'BD par la symétrie de centre C'. Le symétrique de D est noté E et l'angle $\widehat{C'DA}$ est lui aussi droit.

Les points F, A', D, C', et E sont alignés, les droites (EF) et (CA) sont parallèles donc le quadrilatère CFEA est un rectangle.

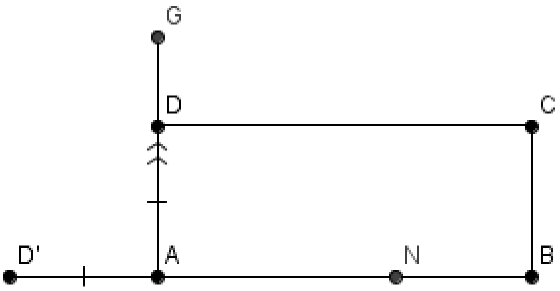
3) Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire?

Tout d'abord, on considère un rectangle de longueur a et de largeur b (d'aire de ab). Pour obtenir un carré de même aire que le rectangle , il faut savoir tracer la longueur $\sqrt{ab}$ connaissant les longueurs a et b.

Dans un rectangle ABCD tel que AB=a et AD=b, on trace la demi-droite [BA) et on place le point D' tel que AD'=AD.
Plaçons ensuite le point F milieu de [BD'].

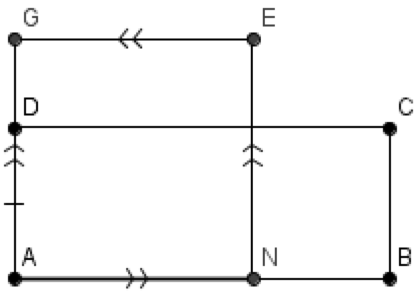


Traçons ensuite le cercle de diamètre [BD'] et de centre F , l'intersection de ce cercle avec la

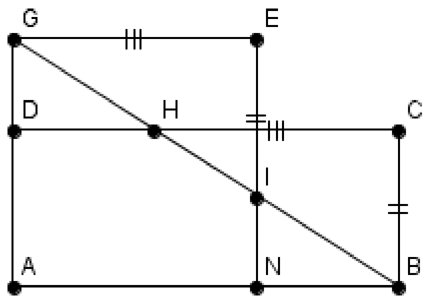


perpendiculaire à (AB) est le point G tel que le segment AG= $\sqrt{ab}$.

Il reste à placer le point E et le carré ANEG a alors pour aire ab.



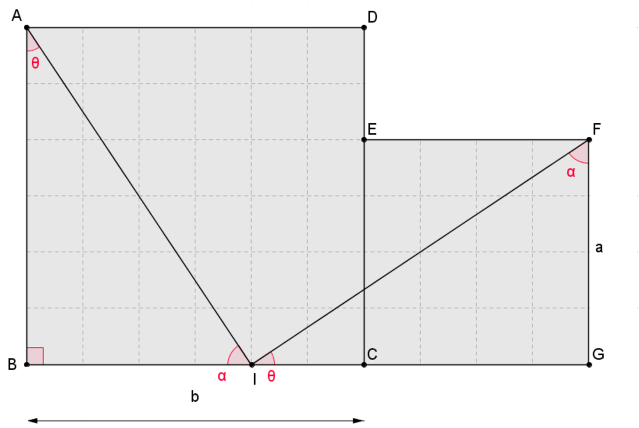
Une fois que l'on a ce carré d'aire ab , on le superpose sur le rectangle d'origine d'aire ab de façon à avoir un sommet quelconque du carré sur un sommet du rectangle. Nous traçons ensuite le segment [GB].



Ceci forme sur ce schéma les triangles HCB et INB que l'on découpe. On remplace ensuite le triangle GDH par le triangle INB ainsi que le triangle GIE par le triangle HBC. On obtenu une méthode pour découper un rectangle quelconque d'aire ab en un carré d'aire ab.

4) Théorème de Pythagore

Considérons deux carrés d'aires différentes ADCB et EFGC mis côte à côte. Plaçons ensuite le point I sur le segment [BG] tel que BI=CG.



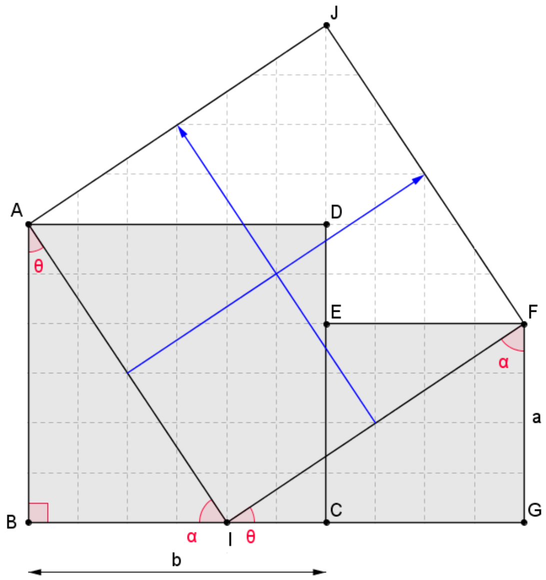
Les triangles ABI et FGI sont isométriques puisque ils possèdent un angle de $\frac{\pi}{2}$ et ont les côtes adjacents à cet angle de même de mesure:

- FG=IB=a
- BC=b et IG=BG-BI=(b-a)+a=b

Soit J le translaté du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$, le quadrilatère AJFI est alors un parallélogramme. De plus FI=FA donc le parallélogramme AJFI est un losange.

Et pour finir ($\overrightarrow{GF};\overrightarrow{GI}$)= $\frac{\pi}{2}$ d'où

$$\theta+\alpha=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$



or $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IF})+(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})$

et $(\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IB})=\pi$ et posons $(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{IA})=\lambda$
ainsi

$$\pi=\theta+\lambda+\alpha$$

$$\lambda=\pi-(\theta+\alpha)$$

$$\lambda=\frac{\pi}{2}$$

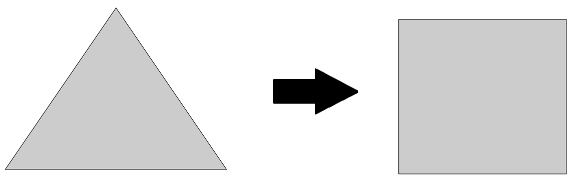
d'où AJFI est un carré.

5) Récurrence

Soit P(n) la propriété :
Tout polygone de n cotés et d'aire a peut se découper pour obtenir un carré d'aire a

Initialisation :

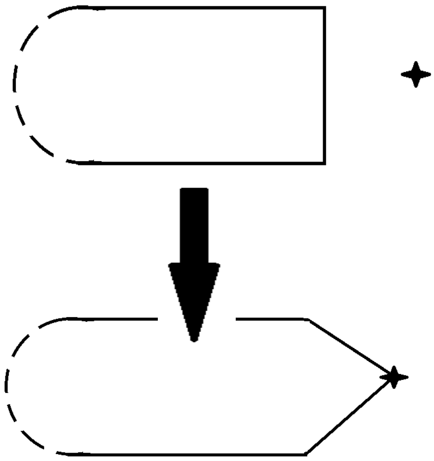
Pour n=3, on sait découper un triangle en un rectangle de même aire et on un rectangle en un carré de même aire.



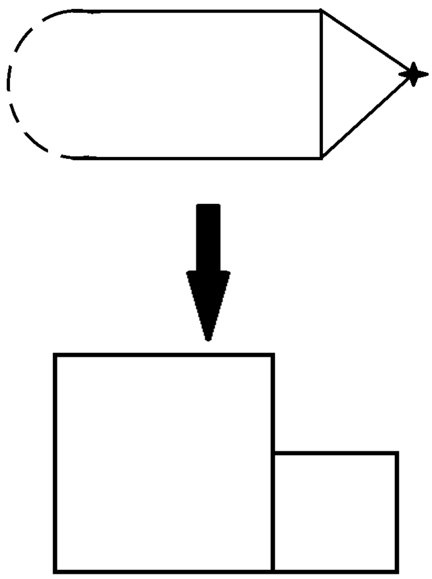
On a par la même occasion montrer que la propriété était vraie pour n=4 donc P(3) et P(4) sont vraies

Hérédité :

Supposons la propriété P(n) vraie à un rang n donné (n > 2). D'après l'hypothèse de récurrence, tout polygone de n cotés d'aire a peut se découper de façon a obtenir un carré d'aire a. Si l'on rajoute un point, c'est a dire que le polygone passe a n+1 cotés.



Cela revient donc a rajouter un triangle donc par découpage a rajouter un carré et en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous nous retrouvons donc dans la situation suivante :



Or grâce au théorème de Pythagore, on peut découper ces deux carrés pour obtenir un carré d'aire a. Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion :
D'après l'axiome de récurrence, tout polygone peut se découper en un carré de même aire.

6) Conclusion

Dans le cas général on cherche à découper un polygone P_1 de p_1 côtés en un polygone P_2 de p_2 côtés tous deux de même aire.

Tout d'abord il faut découper le polygone P_1 et le polygone P_1 de façon à les ramener sur le carré C de même aire.

Ensuite pour réaliser le découpage de P_1 à P_2 (et inversement) on pose le découpage de P_1 et le découpage de P_2 sur C et on coupe chaque découpage selon les traits de découpages de l'autre et le tour est joué.