

**RECOLLONS LES**  
**MORCEAUX**

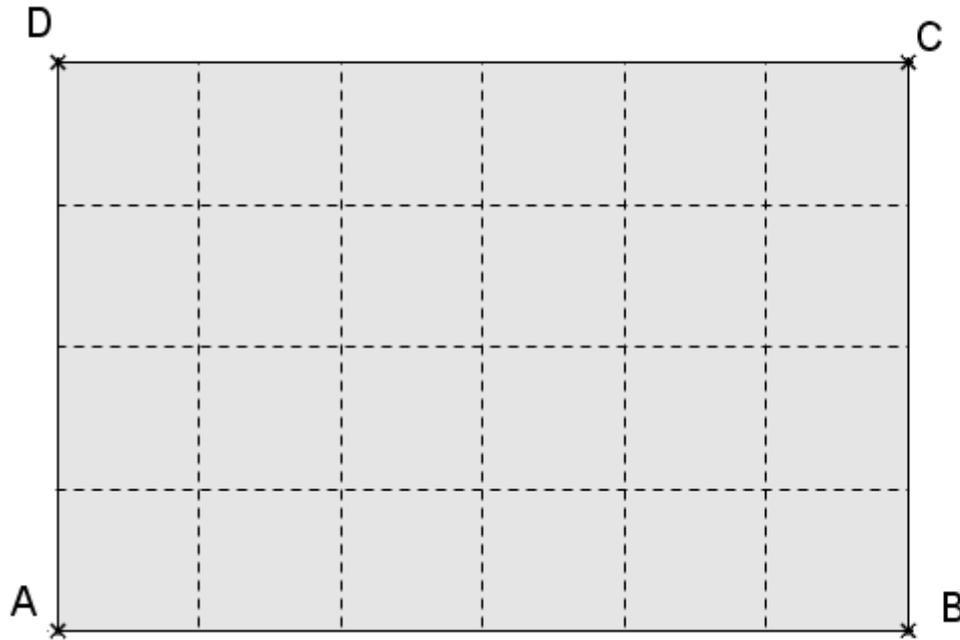
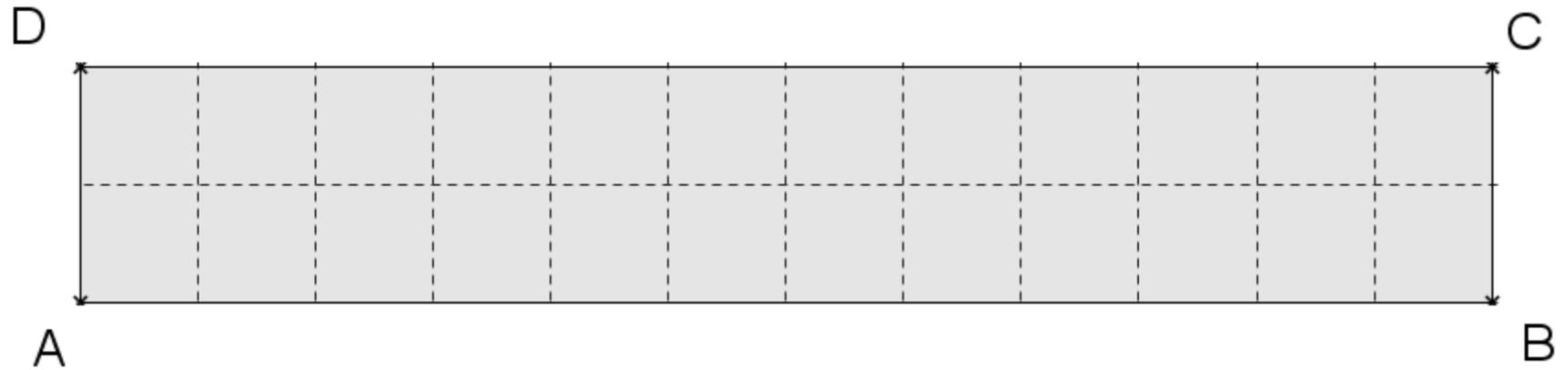
# A) Introduction

Prenez deux polygones A et B dans le plan.

On veut découper A en plusieurs petits polygones, et recoller ces petits polygones pour obtenir B.

On comprend facilement qu'il est nécessaire que A et B aient la même aire.

# A) Introduction



# A) Introduction

·  
La question qui se pose est de savoir si, étant donné deux polygones de même aire, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement, et si oui, comment ?

# **B) Plan de l'exposé**

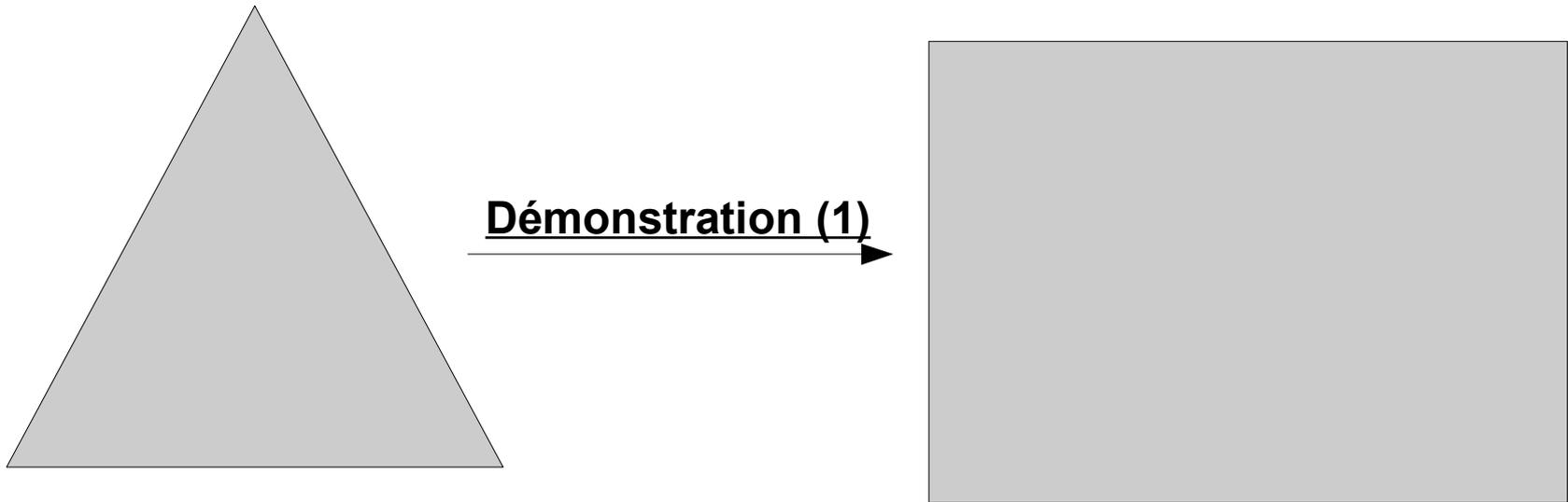
**1/ Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire**

**2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire**

**3/ Théorème de Pythagore**

**4/ Cas général**

# 1/ Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire



## **2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire**

Considérons un rectangle de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'aire  $ab$ . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire  $ab$  qui est ...

## 2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'aire  $ab$ . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire  $ab$  qui est  $\sqrt{ab}$

## 2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'aire  $ab$ . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire  $ab$  qui est  $\sqrt{ab}$

Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de  $ab$  connaissant  $a$  et  $b$

## 2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'aire  $ab$ . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire  $ab$  qui est  $\sqrt{ab}$

Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de  $ab$  connaissant  $a$  et  $b$

**Explication (2)**

## 2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'aire  $ab$ . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire  $ab$  qui est  $\sqrt{ab}$

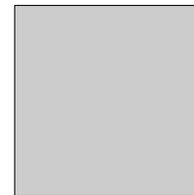
Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de  $ab$  connaissant  $a$  et  $b$

### Explication (2)

Après avoir vu comment trouver la longueur du côté du carré d'aire  $ab$  nous allons montrer comment découper le rectangle d'aire  $ab$  pour obtenir le carré de même aire.



Démonstration(3) →



## 3/Théorème de Pythagore :

Pour découper deux carrés d'aires respectives  $a^2$  et  $b^2$  en un carré d'aire  $a^2+b^2$  on utilise le théorème de Pythagore

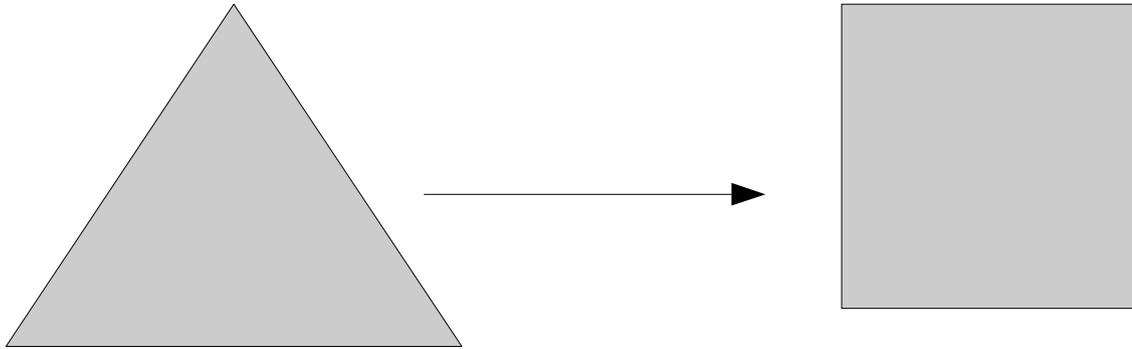
Démonstration (4)

# Récurrance

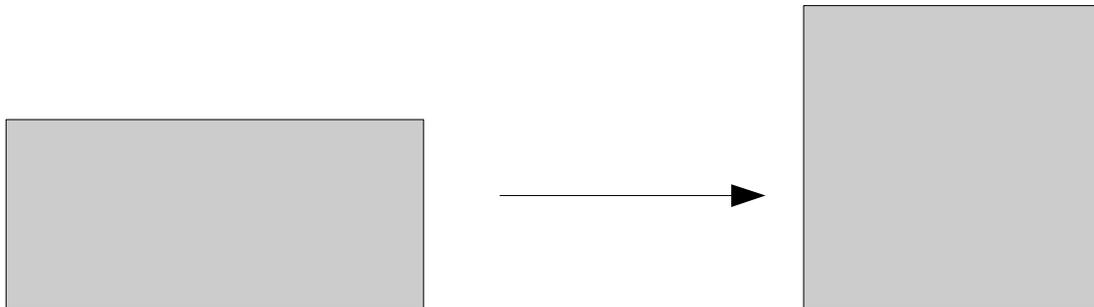
Soit  $P_n$  la propriété :

*Tout polygone de  $n$  cotés et d'aire  $a$  peut se découper pour obtenir un carré d'aire  $a$*

Initialisation : Pour  $n=3$



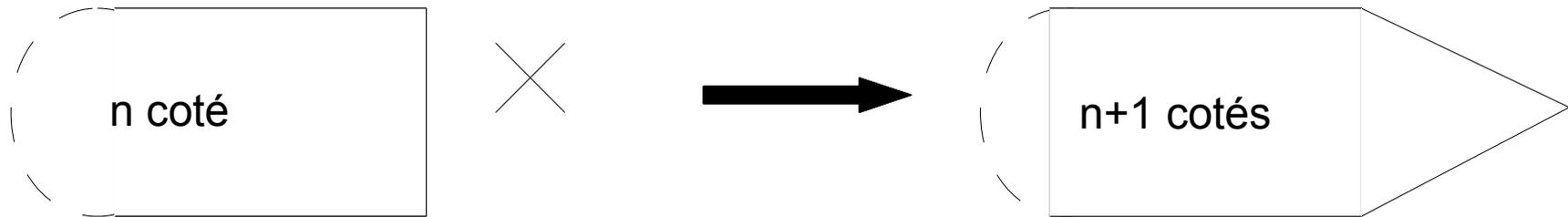
Pour  $n=4$



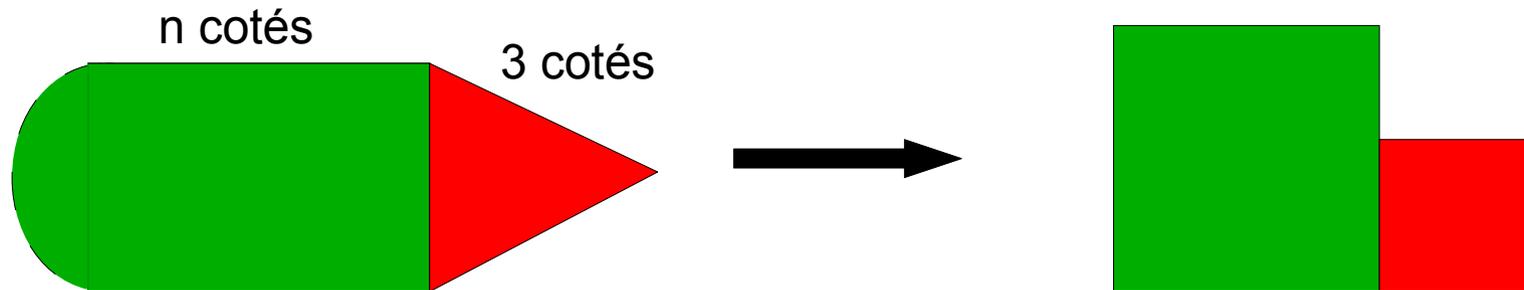
**Donc  $P_3$  et  $P_4$  sont vraies**

**Hérédité** : Supposons la propriété  $P_n$  vraie à un rang  $n$  donné ( $n > 2$ )

D'après l'hypothèse de récurrence, tout polygone de  $n$  cotés d'aire  $A$  peut se découper de façon à obtenir un carré d'aire  $A$ . Si l'on rajoute un point, c'est à dire que le polygone passe à  $n+1$  cotés.



Cela revient donc à rajouter un triangle, donc à rajouter un carré et en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous nous retrouvons donc dans la situation suivante :



Or grâce au théorème de Pythagore, on peut découper ces deux carrés pour obtenir un carré d'aire  $A$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion** : D'après l'axiome de récurrence, tout polygone peut se découper en un carré de même aire.

**Exemple**

## C) Conclusion :

Dans le cas général on cherche à découper un polygone  $P_1$  de  $p_1$  côtés en un polygone  $P_2$  de  $p_2$  côtés tous deux de même aire.

Tout d'abord il faut découper le polygone  $P_1$  et le polygone  $P_2$  pour de façon à les ramener sur le carré  $C$  de même aire.

Après cela pour réaliser le découpage de  $P_1$  à  $P_2$ , les étapes sont :

- effectuer le découpage de  $P_1$  pour obtenir le carré  $C$ ;
- effectuer le découpage de  $P_2$  pour obtenir le carré  $C$  et poser ce découpage sur le précédent.

# Merci de votre attention

Ce sujet vous a été présenté par : - Boudet Corentin  
- Trimoreau Vincent  
- Paris Nicolas

du lycée Moquet-Lenoir de Châteaubriant (44)

Merci à nos professeurs préférés monsieur Gréau et monsieur Ducrot  
pour nous avoir aidé dans nos recherches.