

RECOLLONS LES
MORCEAUX

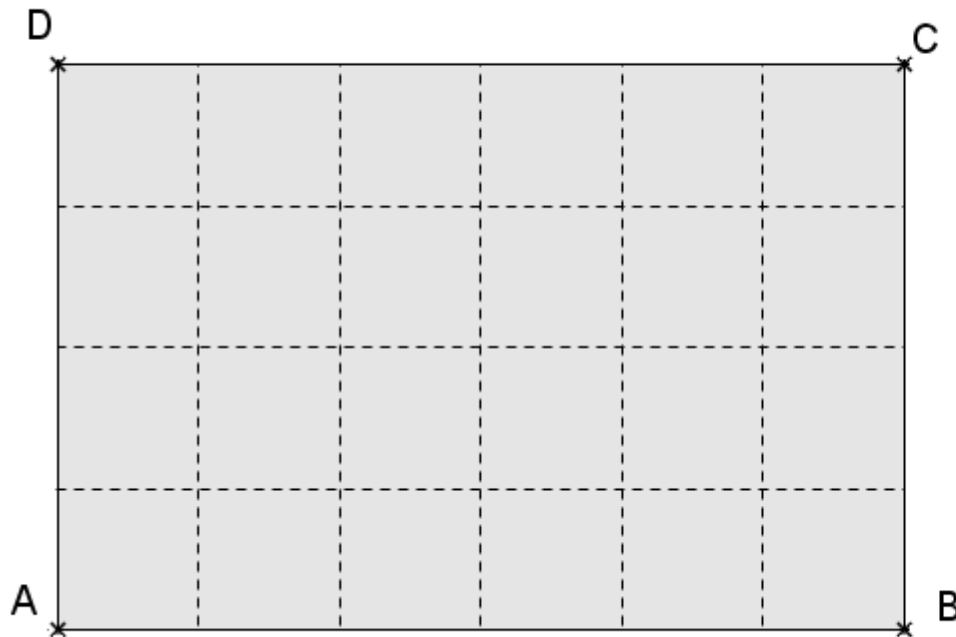
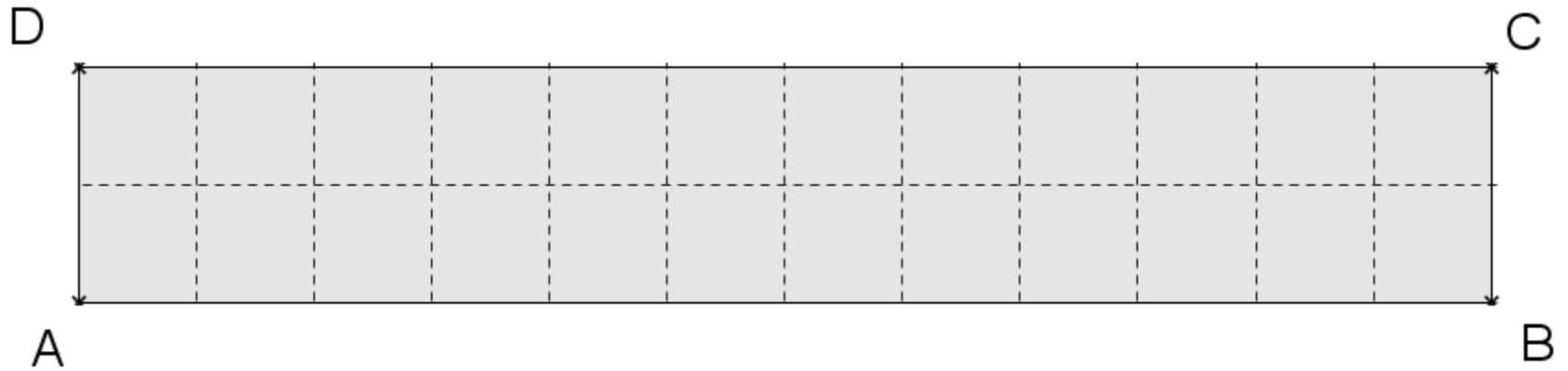
A) Introduction

Prenez deux polygones A et B dans le plan.

On veut découper A en plusieurs petits polygones, et recoller ces petits polygones pour obtenir B.

On comprend facilement qu'il est nécessaire que A et B aient la même aire.

A) Introduction



A) Introduction

·
La question qui se pose est de savoir si, étant donné deux polygones de même aire, on peut toujours passer de l'un à l'autre par découpage et recollement, et si oui, comment ?

B) Plan de l'exposé

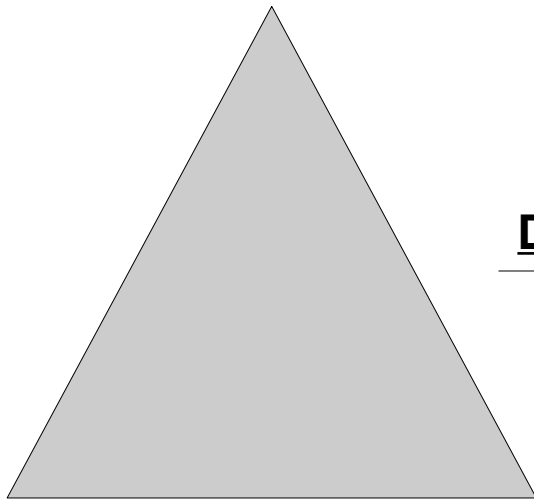
1/ Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire

2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

3/ Théorème de Pythagore

4/ Cas général

1/ Comment découper un triangle pour obtenir un rectangle de même aire



Démonstration (1) →



2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur a , de largeur b et d'aire ab . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire ab qui est ...

2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur a , de largeur b et d'aire ab . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire ab qui est \sqrt{ab}

2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur a , de largeur b et d'aire ab . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire ab qui est \sqrt{ab}

Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de ab connaissant a et b

2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur a , de largeur b et d'aire ab . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire ab qui est \sqrt{ab}

Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de ab connaissant a et b

Explication (2)

2/ Comment découper un rectangle pour obtenir un carré de même aire

Considérons un rectangle de longueur a , de largeur b et d'aire ab . On cherche une méthode pour obtenir le côté du carré d'aire ab qui est \sqrt{ab}

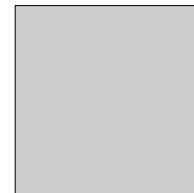
Pour cela nous avons besoin de savoir tracer la longueur racine de ab connaissant a et b

Explication (2)

Après avoir vu comment trouver la longueur du côté du carré d'aire ab nous allons montrer comment découper le rectangle d'aire ab pour obtenir le carré de même aire.



Démonstration(3) →



3/Théorème de Pythagore :

Pour découper deux carrés d'aires respectives a^2 et b^2 en un carré d'aire a^2+b^2 on utilise le théorème de Pythagore

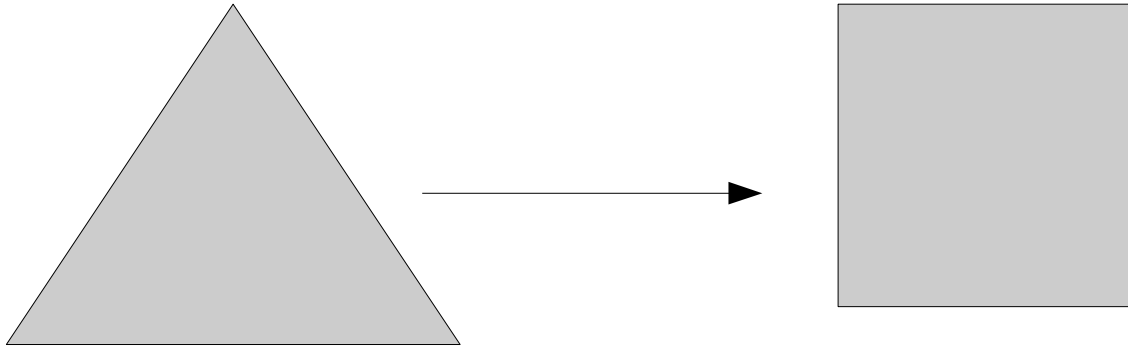
Démonstration (4)

Récurrance

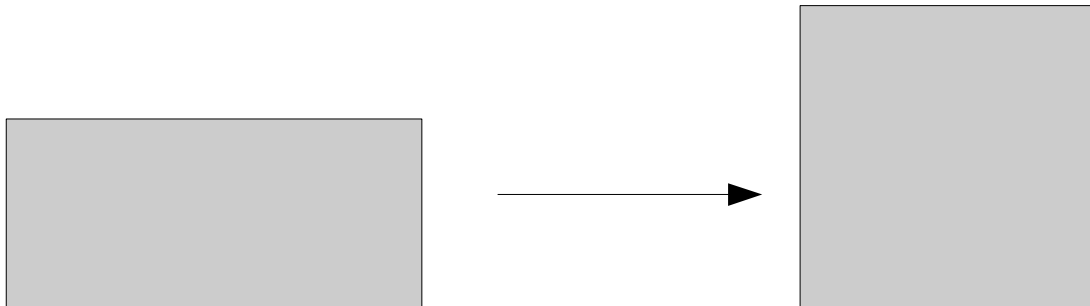
Soit P_n la propriété :

Tout polygone de n cotés et d'aire a peut se découper pour obtenir un carré d'aire a

Initialisation : Pour $n=3$



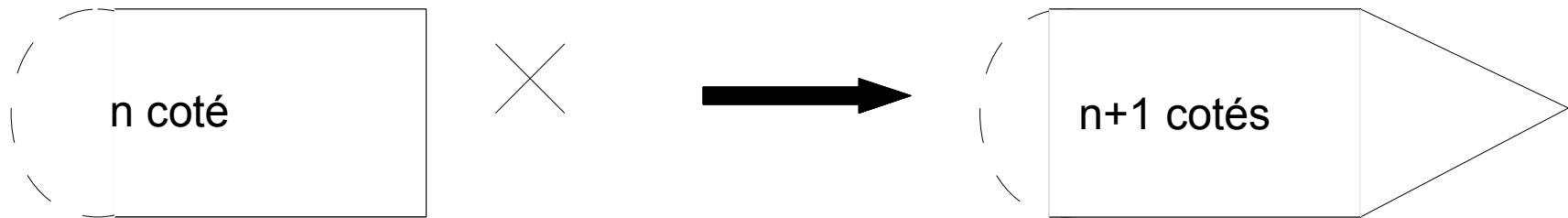
Pour $n=4$



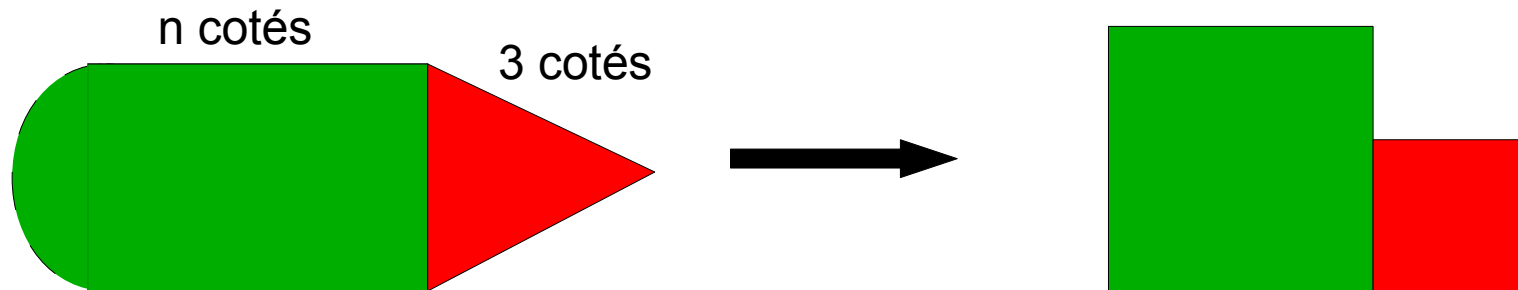
Donc P_3 et P_4 sont vraies

Hérédité : Supposons la propriété P_n vraie à un rang n donné ($n > 2$)

D'après l'hypothèse de récurrence, tout polygone de n cotés d'aire A peut se découper de façon à obtenir un carré d'aire A . Si l'on rajoute un point, c'est à dire que le polygone passe à $n+1$ cotés.



Cela revient donc à rajouter un triangle, donc à rajouter un carré et en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous nous retrouvons donc dans la situation suivante :



Or grâce au théorème de Pythagore, on peut découper ces deux carrés pour obtenir un carré d'aire A . Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, tout polygone peut se découper en un carré de même aire.

Exemple

C) Conclusion :

Dans le cas général on cherche à découper un polygone P_1 de p_1 côtés en un polygone P_2 de p_2 côtés tous deux de même aire.

Tout d'abord il faut découper le polygone P_1 et le polygone P_2 pour de façon à les ramener sur le carré C de même aire.

Après cela pour réaliser le découpage de P_1 à P_2 , les étapes sont :

- effectuer le découpage de P_1 pour obtenir le carré C ;
- effectuer le découpage de P_2 pour obtenir le carré C et poser ce découpage sur le précédent.

Merci de votre attention

Ce sujet vous a été présenté par : - Boudet Corentin
- Trimoreau Vincent
- Paris Nicolas

du lycée Moquet-Lenoir de Châteaubriant (44)

Merci à nos professeurs préférés monsieur Gréau et monsieur Ducrot
pour nous avoir aidé dans nos recherches.