

MASSACRE EN CERCLE :

MAURON Alban (seconde)
HEMMERLE Lionel (1S)

Sujet encadré par David Gréau, professeur de mathématiques, et proposé par François Ducrot,
chercheur à la faculté des sciences d'Angers

Lycée Moquet-Lenoir, Châteaubriant (44)

Introduction :

Dans la mine de la Moria, quarante gobelins pris au piège par des nains ne voulant par tomber aux mains de ces derniers décidèrent de s'entre-tuer de façon algorithmique...Ils se disposèrent en cercle et décidèrent de compter dans l'ordre jusqu'à trois, celui disant trois étant tué et ainsi de suite...jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux gobelins. Où doivent se placer les deux gobelins qui préfère être lâchement prisonniers des nains?

Sommaire :

I-Notations

II-Quand les gobelins comptent jusqu'à deux, c'est à dire quand $n = 2$

a-Quand il y a un gobelin de plus soit déterminer $S(m+1)$ en fonction de $S(m)$

b-Quand il y a deux fois plus de gobelins soit déterminer $S(2m)$ en fonction de $S(m)$

c-La formule finale soit déterminer $S(m)$ en fonction de m

III-Quand les gobelins comptent jusqu'à deux en binaire

a-Introduction au binaire

b-Déterminer $S(m)$ en fonction de l'écriture de m en binaire

IV-Quand les gobelins jusqu'à trois, c'est à dire quand $n = 3$

V-Conclusion

I-Notations :

On note :

- n le nombre jusqu'auquel ils comptent, donc n est un entier supérieur ou égal 2 ;
- m le nombre total de gobelins composant le cercle, donc m est un entier supérieur ou égal n ;
- S_i la fonction qui donne le rang du i -ème gobelin survivant en fonction de m .

On remarque de façon évidente que si l'on compte jusqu'à n , il y a $n-1$ survivants. Pour $n=3$, il y a ainsi deux survivants et les rangs des survivants sont donnés par $S_1(m)$ et $S_2(m)$.

II-Quand les gobelins comptent jusqu'à deux, c'est à dire quand $n = 2$

Voici un exemple dans lequel les gobelins comptent jusqu'à deux :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 2:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 3:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Solution :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Survivant pour 10 gobelins lorsqu'ils comptent jusqu'à 2

Dans cet exemple, le gobelin survivant est le cinquième du cercle soit $S_1(10)=5$

a-Quand il y a un gobelin de plus soit déterminer $S(m+1)$ en fonction de $S(m)$

Théorème :

Pour $m+1$ gobelins, le rang du survivant est égal au rang du survivant pour m gobelin auquel on ajoute 2 modulo $m+1$ soit

$$S(m+1) = S(m) + 2 \text{ modulo } m+1$$

Démonstration :

1 2 3 4 5 ... $m+1$

Lorsqu'il y a $m+1$ gobelins, nous devons en tuer un pour atteindre un cercle où il y a

m gobelins.

1 ~~2~~ 3 4 5 ... $m+1$

Ensuite, nous continuons comme si il y avait m gobelins, mais on compte a partir du premier gobelin mort (le deuxième).

1 ~~2~~ 3 4 5 ... $m+1$

$$3 - 1 = 2$$

On a donc un décalage de 2 entre le rang du survivant entre m gobelins et $m+1$ gobelins. Le modulo permet de revenir au début : quand il y a 16 gobelins, le 17^{ème} ne peut pas mourir, c'est le 1^{er} qui meurt. Ainsi on a démontré que :

$$S(m+1) = S(m) + 2 \text{ modulo } m+1$$

Exemple :

Pour 11 gobelins, nous avons :

$$S(11) = S(11 - 1) + 2 \text{ modulo } 11$$

$$S(11) = S(10) + 2 \text{ modulo } 11$$

or :

$$S(10) = 5$$

donc :

$$S(11) = 5 + 2 \text{ modulo } 11$$

$$S(11) = 7 \text{ modulo } 11$$

Le survivant quand il y a 11 gobelins est donc le 7^{ème} gobelin du cercle.

b-Quand il y a deux fois plus de gobelins soit déterminer $S(2m)$ en fonction de $S(m)$

Théorème :

Pour $2m$ gobelins, le rang du survivant est égal à la position du survivant pour m gobelin multiplié par 2 et soustrait de 1

$$S(2m) = 2S(m) - 1$$

Démonstration :

1 2 3 4 5 ... $2m-1$ $2m$

Lorsque nous avons $2m$ gobelins, nous devons d'abord faire un tour de boucle, qui

supprimera alors tous les gobelins ayant un rang *pair*.

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ... ~~2n~~

Nous continuons alors comme s'il y avait m gobelins, sauf que ces m gobelins ont un rang *impair*.

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ... ~~2n~~

$1 = 1*2-1$ donc 1 est le premier nombre impair ;

$3 = 2*2-1$ donc 3 est le second nombre impair ;

$5 = 3*2-1$ donc 5 est le troisième nombre impair ;

Nous avons ainsi besoin de multiplier par deux et retirer un au rang afin d'obtenir le nombre impair correspondant : 1 est le premier nombre impair, 3 le second, 5 le troisième...

Nous n'avons pas besoin de modulo sur cette formule car le numéro du survivant sur m gobelin est plus petit ou égal à m . En effet :

$$S(m) \leq m$$

donc

$$2*S(m) \leq 2m$$

donc

$$2*S(m) - 1 \leq 2m$$

Exemple :

Pour 20 gobelins, nous avons :

Pour 20 gobelins, nous avons :

$$S(20) = S(20 / 2) + 1$$

$$S(20) = S(10) * 2 + 1$$

or :

$$S(10) = 5$$

donc :

$$S(20) = 5 * 2 - 1$$

$$S(20) = 11$$

Le survivant quand il y a 20 gobelins est donc le 11^{ème} gobelin du cercle.

c-La formule finale soit déterminer $S(m)$ en fonction de m

Théorème :

Pour m gobelins, le rang du survivant est égal au nombre de gobelins multiplié par 2, soustrait de la plus grande puissance de 2 possible et augmenté de 1

$$S(m) = 2m - 2^k + 1$$

avec k le plus grand entier tel que : $2^k \leq 2m$

Démonstration :

Pour $m \geq 2$, Soit $P(m)$ la propriété $S(m) = 2m - 2^k + 1$

Initialisation pour $m = 2$:

On sait que de façon évidente, que pour un cercle de deux gobelins, que le survivant est le premier du cercle soit $S(2) = 1$.

De plus, la plus grande puissance de 2 inférieure à $2*2$ est 4 donc la formule donne
 $2*2 - 4 + 1 = 1$

Donc la propriété $P(m)$ est vraie pour $m = 2$

Hérédité :

Supposons $P(m)$ vraie a un rang m donné

Si $m+1$ est une puissance de 2, alors il existe un entier k tel que $m+1 = 2^k$,
donc $2*(m+1) = 2^{k+1}$,
donc $S(m+1) = 1$ et la formule donne aussi $2*(m+1) - 2^{k+1} + 1 = 1$,
donc $P(m+1)$ est vraie

Si $m+1$ n'est pas une puissance de 2, alors 2^k est la plus grande puissance de deux que l'on peut enlever à $2*m$ et :

$$S(m+1) = (S(m) + 2) \text{ modulo } (m+1)$$

Or par hypothèse de récurrence : $S(m) = 2m - 2^k + 1$

$$S(m+1) = (2m - 2^k + 1 + 2) \text{ modulo } (m+1)$$

$$S(m+1) = (2(m+1) - 2^k + 1) \text{ modulo } (m+1)$$

donc $P(m+1)$ est vraie

Ainsi dans les deux cas, la propriété est vraie au rang $m+1$

Conclusion :

Par le principe de récurrence, $S(m) = 2m - 2^k + 1$ est vraie pour tout entier m

supérieur ou égal à deux

Exemple :

Pour 10 gobelins, nous avons :

$$2*10=20$$

La plus grande puissance de 2 inférieure à 20 est 16=2⁴ donc :

$$S(10) = 10*2 - 2^4 + 1$$

$$S(10) = 20 - 16 + 1$$

$$S(10) = 5$$

Pour 10 gobelins, le survivant est donc bien le 5^{ème} goblin du cercle.

III-Quand les gobelins comptent jusqu'à deux en binaire

a-Introduction au binaire

Lorsqu' l'on écrit un nombre normalement , on l'écrit en base 10, c'est a dire que l'on peut décomposer l'écriture du nombre en puissance de 10 :

Exemple :

$$472 = 4*100 + 7*10 + 3$$

$$472 = 4*10^2 + 7*10^1 + 3*10^0$$

Quand on écrit en base 2, on décompose l'écriture en puissance de 2 :

Exemple :

$$472 = 1*256 + 1*128 + 1*64 + 0*32 + 1*16 + 1*8 + 0*4 + 0*2 + 0*1$$

$$472 = 1*2^8 + 1*2^7 + 1*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0$$

472 s'écrit donc 111011000 en base 2

Lorsque l'on écrit en base 2, on ajoute généralement des 0 à gauche du nombre pour obtenir un nombre précis de chiffres (8bit = 8 chiffres ; 16bit = 16 chiffres)

Exemple :

$$12 = 1*8 + 1*4 + 0*2 + 0*1$$

12 s'écrit donc 1100, mais en 8bit on rajoute des 0 à gauche pour avoir 8 symboles :12 s'écrit donc 00001100 en 8bit

b-Déterminer $S(m)$ en fonction de l'écriture de m en binaire

En binaire, nous avons remarqué que la formule finale expliquait cette propriété :

En binaire, appliquer la formule finale est donc équivalent à prendre le 1 le plus à gauche, et à le mettre à droite.

Exemple :

Pour 10 nains :

$$10 = 1*8 + 0*4 + 1*2 + 0*1$$

10 s'écrit donc donc 1010 en binaire.

Pour calculer le rang du survivant quand il y a 10 gobelins, on prend le 1 le plus à gauche :

1010

Puis on le met à droite :

0101


La réponse est donc :

$$0*8 + 1*4 + 0*2 + 1*1 = 5$$

Le survivant est bien le 5^{ème} quand il y a 10 gobelins.

Cette propriété peut être expliquée facilement :

Lorsque l'on multiplie le nombre de gobelins par deux, on décale tous les chiffres de 1 cran vers la gauche.

Ensuite, retirer la puissance de deux la plus grande revient à retirer le 1 le plus à gauche.

Enfin, lorsqu'on augmente de 1 le résultat, on remplace le 0 le plus à droite, apparu grâce au décalage, par un 1.

Combiner toutes ses étapes revient donc à prendre le 1 le plus à gauche, et à le mettre à droite.

IV-Quand les gobelins jusqu'à trois, c'est à dire quand $n = 3$

Quand les gobelins comptent jusqu'à 3, il y a deux survivants, notés $S_1(m)$ et $S_2(m)$

Exemple :

Pour 10 gobelins :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 1:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 2:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Étape 3:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Solution :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Survivants pour 10 gobelins lorsqu'ils comptent jusqu'à 3

Ainsi, $S_1(10)=4$ et $S_2(10)=10$

Théorème :

Pour $m+1$, les rangs des survivants gobelins sont égaux aux rangs des survivants pour m goblin plus 3.

Pour calculer le numéro du premier survivant:

$$S_1(m + 1) = (S_1(m) + 3) \text{ modulo } m$$

Pour calculer le numéro du second survivant:

$$S_2(m + 1) = (S_2(m) + 3) \text{ modulo } m$$

Démonstration :

1 2 3 4 5 ... $m+1$

Lorsqu'il y a $m+1$ gobelins, nous devons en tuer un pour atteindre un cercle où il y a m gobelins.

1 2 ~~3~~ 4 5 ... $m+1$

Ensuite, nous continuons comme s'il y avait m gobelins, mais on compte à partir du premier goblin mort (le troisième).

1 2 ~~3~~ 4 5 ... $m+1$

$$4 - 1 = 3$$

On a donc un décalage de 3 entre m gobelins et $m+1$.

Le modulo permet de revenir au début : quand il y a 16 gobelins, le 17^{ème} ne peut pas mourir, c'est le 1^{er} qui meurt.

Exemple :

Pour 11 gobelins

nous avons :

$$S_1(11) = (S_1(10) + 3) \text{ modulo } 11$$

et

$$S_2(11) = (S_2(10) + 3) \text{ modulo } 11$$

or :

$$S_1(10) = 4$$

et

$$S_2(10) = 10$$

donc :

$$S_1(11) = (4 + 3) \text{ modulo } 11$$

$$S_1(11) = 7 \text{ modulo } 11$$

$$S_1(11) = 7$$

et

$$S_2(11) = (10 + 3) \text{ modulo } 11$$

$$S_2(11) = 13 \text{ modulo } 11$$

comme 13 est plus grand que 11, on applique le modulo

$$S_2(11) = 2$$

Les deux survivants lorsqu'il y a 11 gobelins sont donc les 2^{ème} et 7^{ème} gobelins du cercle.

V-Conclusion

Nous sommes donc en mesure de connaître les rangs des survivants quand les gobelins comptent jusqu'à 2 sans avoir à calculer les rangs précédents ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils comptent jusqu'à 3 où nous devons alors connaître les rangs des survivants précédents.

De plus, la formule permettant de calculer le rang des survivants quand il y a $m+1$ gobelins grâce au rang du survivant quand il y a m gobelins fonctionne quel que soit le nombre n jusqu'au quel les gobelins comptent, à condition de l'adapter en remplaçant le +2 (où +3) par un $+n$.