

QUELQUES IDÉES DE SUJETS POUR MATH EN JEANS EN 2013-2014

FRANÇOIS DUCROT

(1) C'est du billard

On considère deux points M et N sur un billard. Peut on envoyer un boule placée en M sur la boule placée en N en respectant une suite de bandes imposée ?

(2) Triangles et autres figures magiques

On regarde un triangle A, B, C , ainsi que les milieux A', B', C' des côtés. On cherche à déposer sur ces 6 points les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on dira que le triangle obtenu est magique si les sommes des nombres sur chacun des côtés sont égales. On veut déterminer *tous* les triangles magiques. On cherchera ensuite des variantes de ce problème, en regardant un tétraèdre à la place du triangle, ou en mettant 4 nombres au lieu de 3 sur chaque côté, ou bien en regardant d'autres nombres que les premiers entiers.

(3) Fractions égyptiennes, ou comment ne pas faire de miettes

Vers environ 2000 ans avant JC, un scribe égyptien devait partager 6 pains entre 10 personnes. La solution la plus élémentaire serait de couper chacun des 6 pains en dix parties égales, puis de donner ensuite à chacune des personnes 6 petits morceaux de pain. Mais cela fera beaucoup de miettes. Une autre façon de procéder serait de couper 5 des pains en deux, et le dernier en 10 morceaux, puis de donner à chacun un gros morceau et un petit. Cela illustre l'égalité

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

cet exemple historique suggère deux problèmes :

- Un problème classique : Si on se donne une fraction de deux entiers p et q . On se demande s'il est possible de trouver des entiers positifs p_1, \dots, p_r , tous différents, vérifiant :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_r}$$

Par exemple :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$$

ou encore

$$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$$

On peut aussi se demander comment obtenir une décomposition avec aussi peu de fractions que possible.

- Un problème sur lequel je n'ai pas trop d'idée, mais qui devrait pouvoir donner des développements : étant donné p pains et q convives, On veut répartir le pain de façon équitable entre les p convives, tout en ne s'autorisant qu'à couper des pains en parties égales. Comment trouver une répartition qui produise le moins de morceaux possible.

(4) Mona Lisa au photomaton.

Sur le site <http://www.lifl.fr/~mathieu/transform/>, on voit une application java qui transforme une image en une autre image par une transformation très simple (par exemple, la transformation du photomaton, qui semble transformer une image en 4 reproductions de cette image de taille moitié, comme une photographie de photomaton), et qui itère cette transformation. On a la surprise de constater que, au bout d'un certain

nombre d'itérations, on retombe sur l'image de départ. Le travail proposé consiste à essayer de comprendre ce phénomène, et à déterminer le nombre nécessaire d'itérations pour revenir à l'image de départ.

(5) **Le jeu de pousse-pousse.**

Le jeu de pousse-pousse est constitué par un rectangle en plastique dans lequel se trouvent des lettres de l'alphabet pouvant glisser les unes sur les autres. Une des cases est vide. Le problème est de savoir si on peut faire glisser les cases de façon à reconstituer un mot donné. Est-ce toujours possible quelque soit la configuration de départ ? Est-ce qu'on peut décrire une méthode pour le faire systématiquement ?

(6) **Test agronomique.**

Un entreprise de fabrication de semences veut tester la croissance de n variétés de blé en les semant sur n parcelles de terrain. Mais il veut s'affranchir de l'éventuelle influence de la qualité de la terre et de l'ensoleillement des différentes parcelles. Il va donc effectuer plusieurs tests successifs en effectuant une rotation des semences sur les différentes parcelles.

Comment faire pour éviter tous les biais ? Maintenant, il veut tester simultanément n variétés de blé et n engrais différents.

Comment organiser maintenant les permutations ?

Il complique encore le problème en testant n variétés de blé, n engrais et n insecticides (voire n fongicides, etc. . .) Comment faire ?

(7) **Le problème de Flavius Josèphe.** Flavius Josèphe est un historien juif du premier siècle après JC qui a participé aux révoltes des juifs contre l'envahisseur romain. Il se retrouva bloqué avec 40 autres compagons dans une citadelle assiégée. Ses compagons décident de se tuer pour ne pas tomber aux mains de l'ennemi. Josèphe tenait, quant à lui, ainsi qu'un de ses compagons, plus à la vie. Il propose à ses amis de se placer en cercle. Le premier dit 1, le deuxième dit 2, le troisième dit 3 ; on le tue, et le suivant dit 1, et on continue en tuant à chaque fois celui qui dit 3. A la fin, il ne reste plus que Josèphe et son ami, qui se rendent alors aux Romains.

- Où se sont placés Josèphe et son ami par rapport au premier ?
- Plus généralement comment peut on décrire la liste ordonnée des disparus, quand on a un nombre quelconque de participants ?
- Peut on dire quelque chose en remplaçant 3 par un autre nombre ?

(8) **Sommes et différences de deux carrés.**

- Quels sont les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme différence de deux carrés d'entiers ?
- Quels sont les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers ?
- Quels sont les nombres entiers a , b et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$?