Math en JEANS

Pousse-Pousse Sur Un Graphe

Mauron Alban Première 1re S

Chereau Pierre-Axel 1re S

Enseignant : Mr Gréau

Chercheur : Mr Ducrot

Année 2014-2015

Lycée Guy-Moquet

Sommaire

I) Le sujet
II) Introduction
III) Le graphe
IV) Placement des pions
V) Hypothèses et propriétés
VI) Pistes de recherche
VII) Conclusion

I) Le sujet

On considère un graphe avec n+1 sommets numérotés de 0 à n, tel que chaque sommet du graphe soit relié a exactement trois autres sommets. On prend n jetons, numérotés de 1 à n et on les places arbitrairement sur les n sommets du graphe.

Peut-on faire en sorte de remettre chaque jeton sur le sommet de même numéro, en s'autorisant uniquement à faire glisser un jeton sur une arrête vers un sommet vide ?

Remarque :

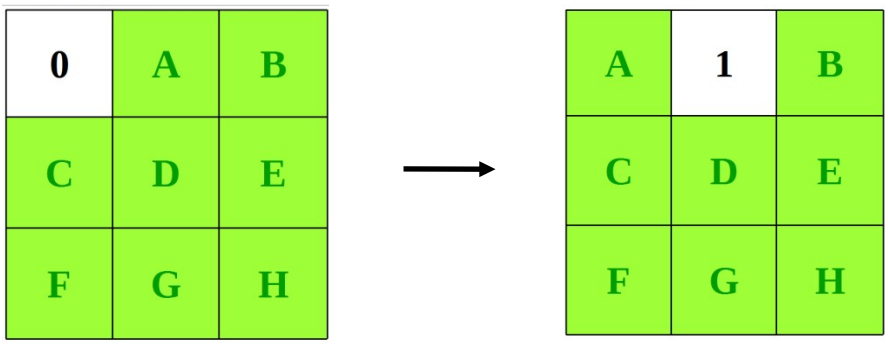
Dans ce qui suit, pour ne pas confondre les sommets et les jetons :

- les sommets seront numérotés de 0 à n ;
- les jetons seront numérotés de la lettre A à la n-ième lettre.

II) Introduction

Le pousse-pousse (ou taquin) est un jeu qui se joue seul et dont le but est de reconstituer une image. Cela revient donc à mettre les pièces du jeu dans un certain ordre.

Exemple :



Sur ces images, les pièces sont représentées par des lettres et doivent être remises sur leurs emplacements respectifs représentés par des nombres : la pièce A sur l'emplacement 1 et ainsi de suite.

Définition :

Un graphe est un schéma contenant des points nommés sommets, reliés ou non par des segments appelés arêtes.

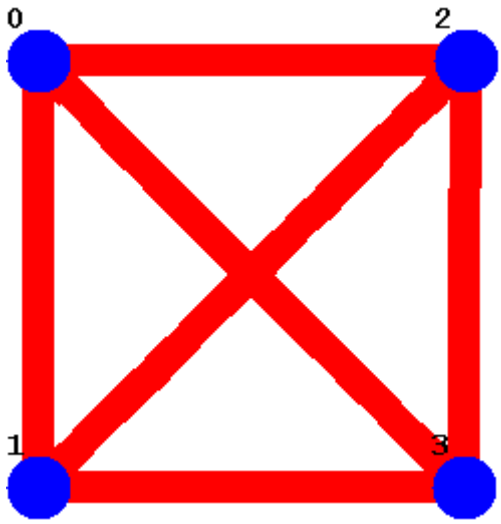
Remarque :

Dans notre sujet, les différences avec le jeu du pousse-pousse classique sont :

- la recherche ne s'effectue pas sur une planche mais sur un graphe ;
- on ne peut déplacer les pions vers un sommet vide que par une liaison ;
- chaque sommet doit être relié à exactement trois autres.

Exemple :

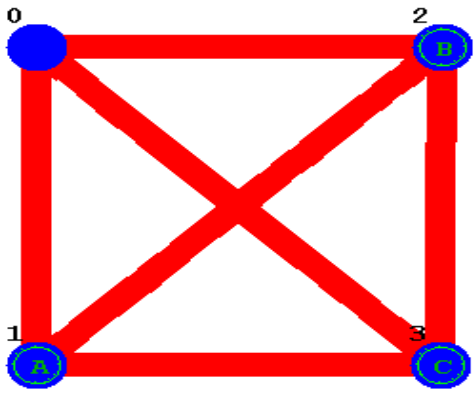
Le graphe ci-contre est un graphe à 4 sommets, les sommets sont en bleu, les liaisons en rouge.



Définition :

Un graphe est dit **réalisable** si l'on peut, en respectant les règles du jeu établie, placer chaque pion sur le sommet qui lui correspond.

Exemple :



Dans l'exemple précédent, la figure est réalisée puisque le pion A est sur le sommet 1, le B sur le 2 et le C sur le 3.

Le but du pousse-pousse sur un graphe est donc de replacer chaque pion sur son sommet.

La recherche a pour but de déterminer sans jouer si un graphe est réalisable ou non.

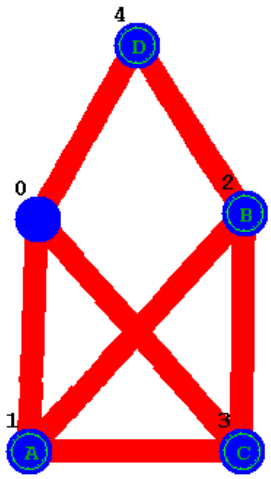
III) Le graphe

Il existe un nombre fini de graphe à n+1 sommets et on peut trier ces graphes en deux groupes : ceux qui respectent la règle qu'un sommet doit être relié à trois autres et ceux qui ne la respectent pas. En effet si chaque sommet n'a pas trois liaisons avec trois autres sommets, la consigne n'est pas respectée et l'on ne peut pas jouer.

Définition :

Un graphe est dit **dessinable** s'il respecte la règle des 3 sommets.

Exemple :



Sur ce graphe à 5 sommets, le sommet 4 n'a que deux liaisons et les quatre autres sommets ont chacun leurs trois liaisons respectives. Le sommet 4 ne peut donc pas créer de nouvelle liaison. Ce graphe ne respecte pas la règle.

Pour déterminer si un graphe est dessinable, il faut déterminer le nombre de liaison d'un graphe.

Pour un graphe à n+1 sommets et par le biais d'un calcul on peut prouver qu'un graphe est dessinable ou non.

Théorème :

On considère un graphe à n+1 points. Si n est impair alors le graphe est dessinable.

Démonstration :

On cherche à déterminer le nombre de liaisons d'un graphe. On multiplie le nombre de sommets (n+1) par 3 car il y a trois liaisons par sommet et ensuite on divise le résultat obtenu par deux car une liaison relie deux points.

On obtient 3(n+1)/2 liaisons.

Un graphe est donc dessinable si 3(n+1)/2 est entier c'est-à-dire si 3(n+1) est divisible par 2.

Comme 3 n'est pas divisible par 2,

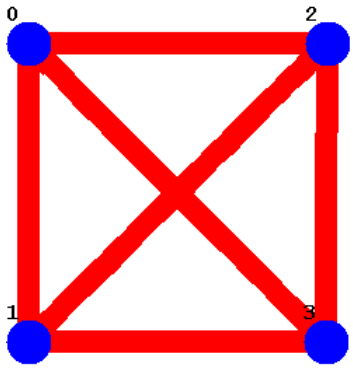
3(n+1) est divisible par 2 si et seulement si n+1 est divisible par 2

si et seulement si n+1 est pair

si et seulement si n est impair

Exemple :

Pour n+1=4, on a donc (3*4)/2=6. Le graphe aura donc 6 liaisons.



Alors que pour n+1=5, on a donc (3*5)/2=7.5.

Le graphe aura 7 liaisons et un sommet n'en aura que deux.

Grâce à ce théorème, l'établissement du groupe de graphes qui respectent la règle est rendue possible.

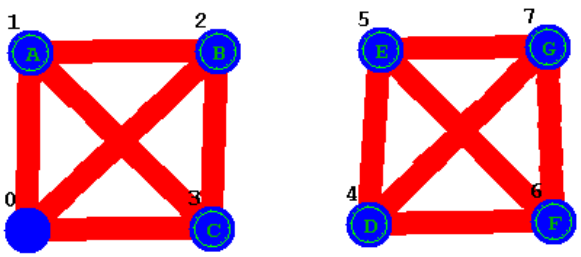
Il contient tous les graphes ayant un nombre pair et un nombre de sommets strictement supérieur à 3. (En effet, un graphe à 2 sommets ne peut pas relier tous ses points à 3 autres).

Définition :

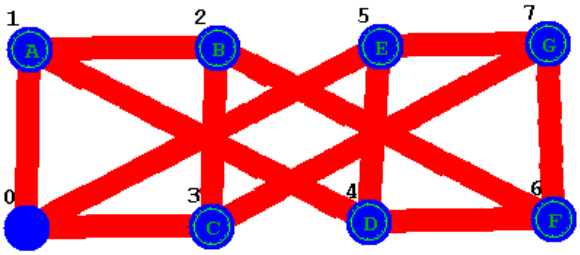
Un graphe **connexe** est un graphe constitué d'une seule partie et où l'on peut donc passer d'un point à n'importe quel autre en passant par les liaisons.

Remarque :

Le graphe ci-dessous n'est pas connexe et ne respecte pas les règles précédemment établies.



Le graphe ci-dessous est connexe et respecte les règles précédemment établies.

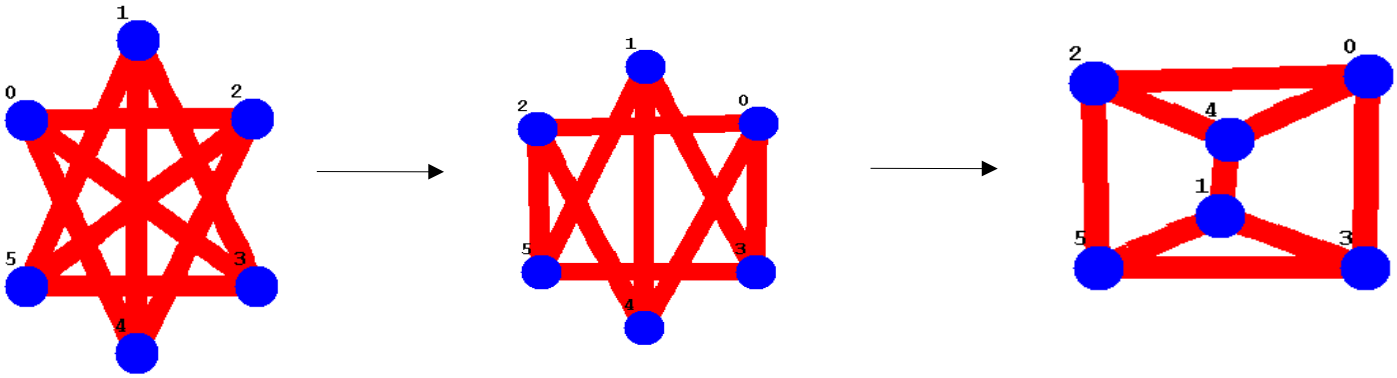


Conclusion :

Pour la suite ; l'étude sera donc portée sur des graphes connexes ayant un nombre pair et de plus de 3 sommets.

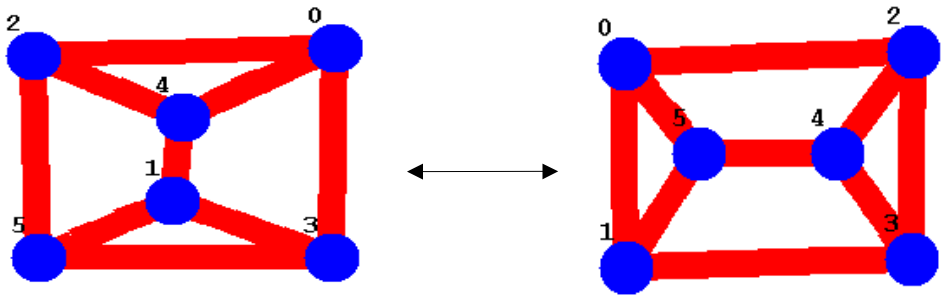
Définition :

Certains graphes sont les mêmes que d'autres, en déplaçant les sommets et leurs liaisons. Ainsi le graphe peut devenir le même qu'un autre alors que ce dernier ne lui ressemblait pas. Ce déplacement a été nommé **simplification**. Il a pour but de réduire le nombre de graphe différents pour un nombre de sommets donnés.

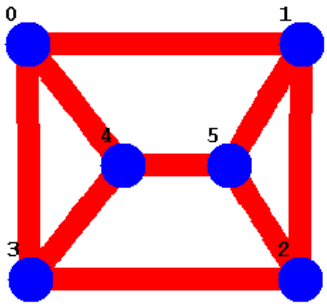


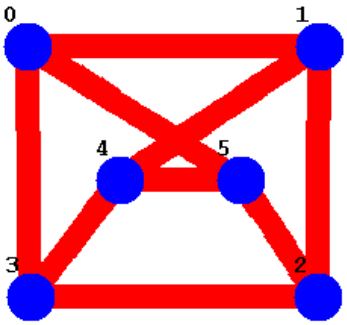
Remarques :

Une simplification ne tient pas compte de la numérotation des sommets ni de l'orientation du graphe. Les deux graphes si dessous sont considérés comme étant équivalents.



Les deux graphes si dessous ne sont eux pas considérés comme étant équivalents. Ce sont d'ailleurs deux graphes qui apparaissant fréquemment après simplifications pour les graphes à 6 sommets.





IV) Placement des pions

La liste de graphe étant déterminée, il reste cependant une question majeure :

Comment placer les pions ?

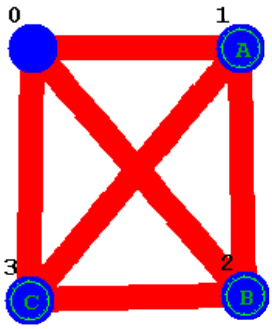
Selon l'énoncé du sujet, les pions sont placés aléatoirement, cependant est-il possible de déterminer le nombre de possibilités ?

Théorème :

Pour un graphe à n+1 sommets, on a (n+1)! façons de placer les n pions.

Démonstration :

En effet, le placement des pions s'effectue tel que chaque sommet sauf un, contient un pion différent.



Par exemple pour un graphe à n+1=4 sommets :

- pour le sommet 1, on à 4 possibilités, soit il ne prend pas de pions (Ø), soit il prend le pion A, B ou C
- pour le sommet 2, on n'a plus que 3 choix ;
- pour le sommet 3, on n'aura plus que 2 choix ;
- pour le sommet 4, on n'a plus qu'1 choix possible.

Cela donne donc 4*3*2*1=24 possibilités de placer les 3 pions sur les quatre sommets.

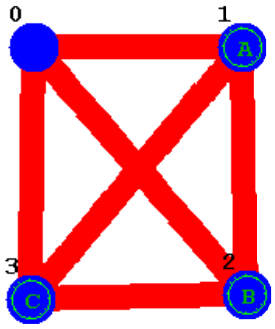
Pour un graphe à n+1 sommets, le sommet 1 a n+1 possibilités, le sommet 2 a donc n+1-1=n possibilités et on refait cela pour tout les sommets. Le nombre de possibilités totales est donc le

produit de tous ces nombres. Pour tout graphe avec n+1 sommets, le nombre de possibilités sera donc

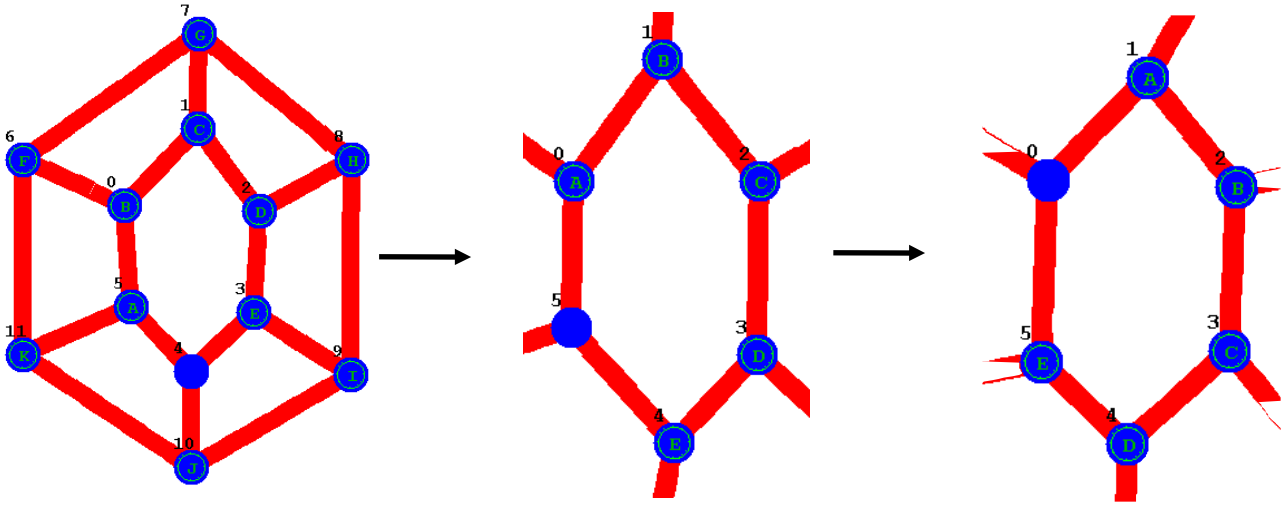
$$(n+1) \times (n) \times (n-1) \times \ldots \times (1) = (n+1)!$$

Cas particuliers :

- Si les pions se retrouvent sur leur sommet respectif, le graphe est résolu sans avoir besoin de bouger les pions. En exemple, le graphe ci-dessous à 4 sommets :



- Si le graphe contient une boucle et que l'ordre des sommets correspond à l'ordre des pions (cette boucle doit contenir le sommet qui n'a pas de pions).
  En faisait tourner les pions le long de la boucle, les pions se retrouveront sur leurs sommets Dans ce graphe à 12 sommets, composé de deux boucles, l'ordre des sommets de la boucle centrale en partant du sommet 0 est {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} et l'ordre des pions, en partant du sommet où il n'y a pas de pion, est {Ø ; A ; B ; C ; D ; E}.
  Les deux ordres correspondent et en déplaçant les pions seulement sur la boucle, ils finiront par retomber sur leur sommet respectif.

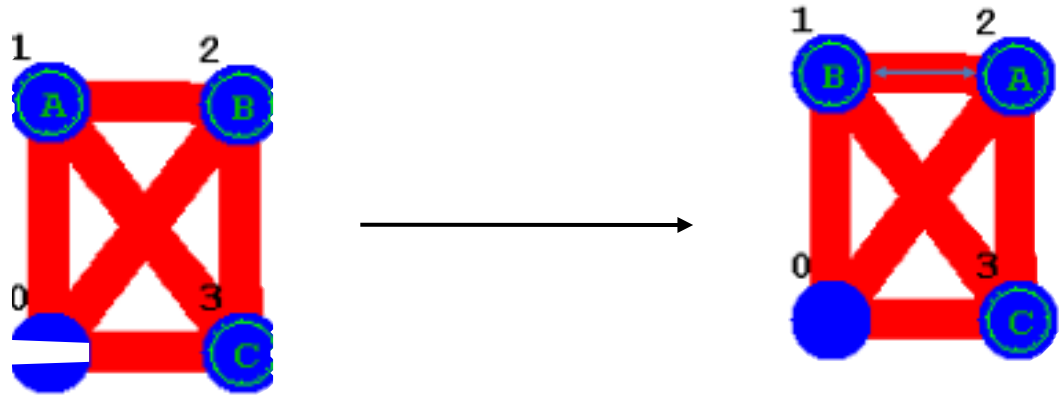


Définition :

On appelle **inversion** le procédé qui consiste à inverser la place de deux pions dont les sommets sont reliés par une arrête dans un graphe.

Exemple :

Le but étant d'essayer de résoudre un graphe dont les pions sont placés sur leur sommet respectif et qui a subit une inversion.

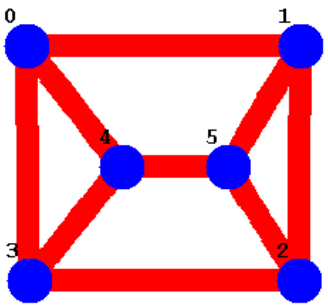


L'inversion a été réalisé sur le sommet 1 et 2, en inversant les pions A et B

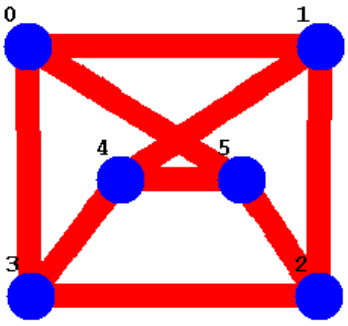
Remarque:

Cette technique a permis de différencier les deux graphes à 6 sommets précédemment montrés. En effet, en essayant de les résoudre, le graphe de gauche s'est montré réalisable suite a une inversion alors que celui de droite non.

La recherche c'est donc penchée sur pourquoi l'un est réalisable alors que l'autre non, et qu'est ce qui les différencie. L'idée principale était la structure des graphes.



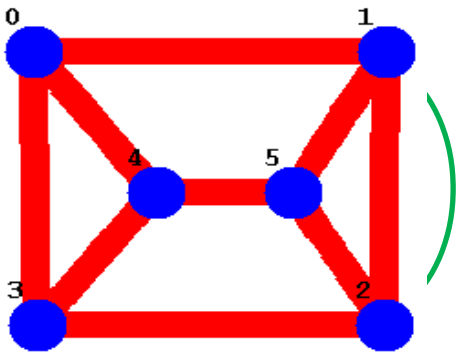
Ce graphe est réalisable.

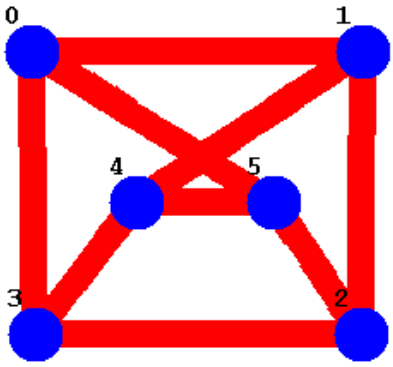


Ce graphe n'est pas réalisable.

V) Hypothèses et propriétés

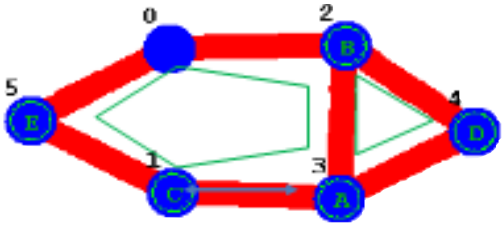
La structure des deux graphes à 6 sommets est visiblement différente. La première hypothèse fut donc que la différence entre ses deux graphes était due au croisement des liaisons du graphe de droite que l'on ne retrouve pas dans le graphe de gauche. En étudiant cela de plus près, et en s'attardant sur les cycles (ou boucles). La présence de cycle de 3 sommets est un élément qui n'apparaît pas dans les deux graphes (entouré en vert).



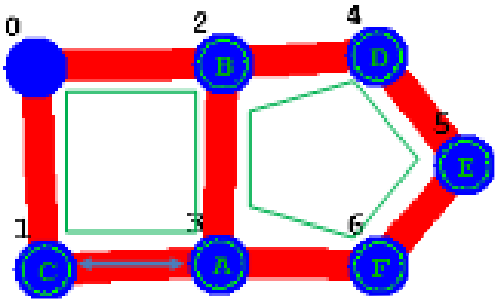


Hypothèses :

- La présence de boucle de cycle 3 permet la réalisation du jeu après une inversion



- La présence de boucle dont les cycles sont pairs et impairs permet la réalisation du jeu après une inversion.

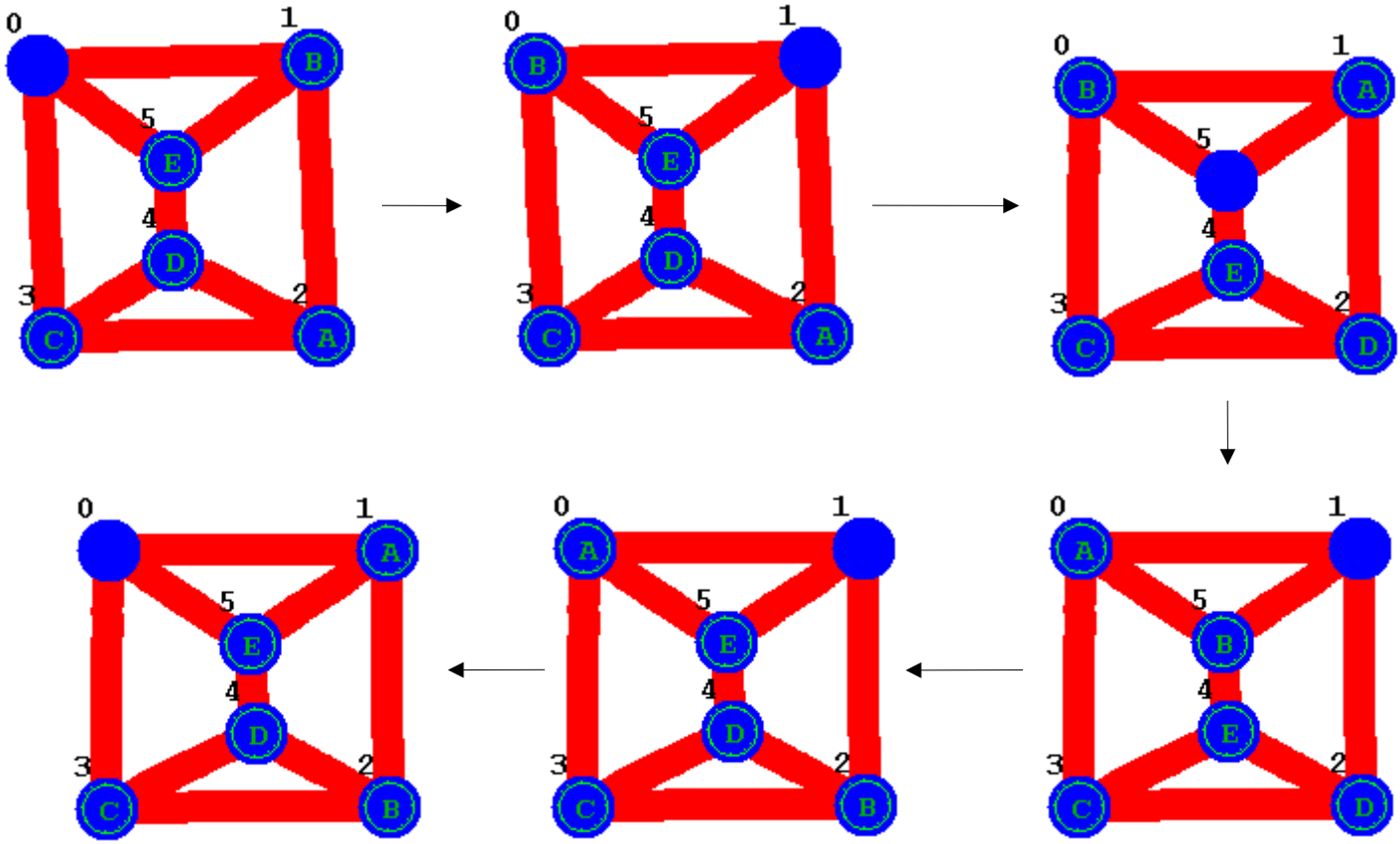


En testant de résoudre ces inversions, la deuxième hypothèse c'est révélée fausse.

Pour la deuxième, elle n'a jamais été mise en défaut mais nous n'avons pas trouvé de démonstration. Nous admettrons donc ce résultat.

Exemple :

A partir du graphe à 6 sommets contenant des cycles de 3 sommets ayant subi une inversion entre les sommets 1 et 2,



Théorème :

La présence de cycle de 3 permet la réalisation du graphe dans n'importe quelles circonstances.

Démonstration :

On sait que la présence de cycle de 3 permet d'échanger deux points dans un graphe.

Nous venons donc de démontrer que nous étions capables d'échanger la place de deux points et donc de résoudre le graphe à chaque fois, en effet comme l'on peut le voir sur cette diapositive : en échangeant les points entre eux nous pouvons réorganiser l'ordre et donc remettre chaque pions sur son sommet respectif.

VI) Piste de recherche

Nous nous sommes ensuite attardés sur un moyen de déterminer le nombre de graphe pour n+1 sommets, nous avons dégagée deux méthodes :

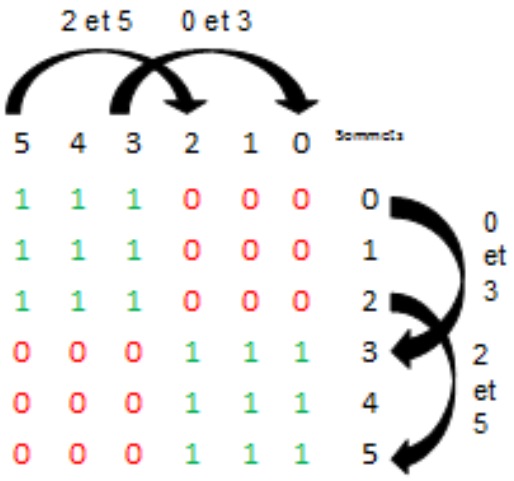
-En simplifiant les graphes, c'est facile mais cela ne donne qu'un aperçu du nombre de graphe.

-Et les matrices, qui récapitulent les liaisons entre les sommets.

Pour simplifier un graphe, nous avons besoin de trouver des graphes différents en cherchant à la main ou à l'aide de notre logiciel, pour ensuite les simplifier, ce qui est long et fastidieux.

Simplification de matrice.

Pour palier à cette lenteur, nous nous sommes penchés sur les matrices. En effets il nous suffit d'inverser les lignes et les colonnes pour « simplifier » le graphe.



Pour « simplifier » une matrice nous isolons les 1 et les 0.

Hypothèse : En trouvant toutes les matrices possibles pour n+1 = 6, en enlevant celle qui ne correspondent pas à nos critères, puis en simplifiant ces matrices, on obtient alors un nombre delta de matrice dites « simplifiées ». Toutes les matrices « simplifiées » qui sont identique sont donc issue du même graphe, et les matrices « simplifiées » n'étant pas identique sont donc issue de graphe différent