SUJETS POUR MATH EN JEANS EN 2014-2015

FRANÇOIS DUCROT

(1) **Pavage**
Une municipalité souhaite paver la place du village. Pour cela le cahier des charges dit que :
- Tous les pavés sont des polygones réguliers (on peut utiliser plusieurs types de polygones)
- Le pavage lui même est régulier (en un sens à préciser)

Pouvez-vous aider le maire à faire la liste de tous les motifs envisageables ?

(2) **Le cador du championnat.**
Lors d'un championnat de France de football récent, le premier du classement distançait le second de 10 points. Les commentateurs en ont déduit que le premier était beaucoup plus fort que les autres. Cette conclusion s'impose-t-elle ? On peut par exemple regarder un championnat parfaitement équilibré, où la probabilité de gagner pour chaque équipe à chaque match est 1/2. On veut étudier la probabilité qu'une équipe distance nettement les autres.

(3) **Dessine moi une arête.**
On s'intéresse au jeu suivant, qui se joue à deux joueurs avec une feuille de papier. Au début, il y a n points marqués sur la feuille. Chacun à son tour, les joueurs tracent un arc de courbe reliant deux points existants, et mettent un point au milieu de l'arc qu'ils ont dessiné. Les contraintes sont :
- Les arcs ne se coupent pas
- De chaque point, il sort pas plus de trois traits (autrement dit, les sommets sont de degré au plus 3)

Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.
Plusieurs questions se posent :
- Est-ce qu'il y a toujours un vainqueur ?
- Quelle est la durée minimale d'une partie ?
- Statégie...

(4) **Fractions égyptiennes, ou comment ne pas faire de miettes**
Vers environ 2000 ans avant JC, un scribe égyptien devait partager 6 pains entre 10 personnes. La solution la plus élémentaire serait de couper chacun des 6 pains en dix parties égales, puis de donner ensuite à chacune des personnes 6 petits morceaux de pain. Mais cela fera beaucoup de miettes. Une autre façon de procéder serait de couper 5 des pains en deux, et le dernier en 10 morceaux, puis de donner à chacun un gros morceau et un petit. Cela illustre l'égalité

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

cet exemple historique suggère deux problèmes :
- Un problème classique : Si on se donne une fraction de deux entiers p et q. On se demande s'il est possible de trouver des entiers positifs $p_1, \ldots, p_r$, <u>tous différents</u>,

vérifiant :

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_r}$$

Par exemple :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$$

ou encore

$$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$$

On peut aussi se demander comment obtenir une décomposition avec aussi peu de fractions que possible.

- Un problème sur lequel je n'ai pas trop d'idée, mais qui devrait pouvoir donner des développements : étant donnés p pains et q convives, On veut répartir le pain de façon équitable entre les p convives, tout en ne s'autorisant qu'à couper des pains en parties égales. Comment trouver une répartition qui produise le moins de morceaux possible.

(5) **Mona Lisa au photomaton.**
Sur le site `http://www.lifl.fr/~mathieu/transform/`, on voit une application java qui transforme une image en une autre image par une transformation très simple (par exemple, la transformation du photomaton, qui semble transformer une image en 4 reproductions de cette image de taille moitié, comme une photographie de photomaton), et qui itère cette transformation. On a la surprise de constater que, au bout d'un certain nombre d'itérations, on retombe sur l'image de départ. Le travail proposé consiste à essayer de comprendre ce phénomène, et à déterminer le nombre nécessaire d'itérations pour revenir à l'image de départ.

(6) **Battons les cartes.**
On part d'un jeu de cartes ayant un nombre pair de cartes. On bat les cartes de la manière suivante. On fait deux paquets, en mettant la première carte sur deux dans le paquet de gauche, la deuxième dans le paquet de droite, ... Quand le paquet initial est vide on met le paquet de gauche au dessus du paquet de droite, et on recommence la même opération. Est-ce qu'on reviendra à l'état initial du paquet, et au bout de combien d'opérations ?

(7) **Le jeu de pousse-pousse ou du taquin.**
Le jeu de pousse-pousse est constitué par un rectangle en plastique dans lequel se trouvent des lettres de l'alphabet pouvant glisser les unes sur les autres. Une des cases est vide. Le problème est de savoir si on peut faire glisser les cases de façon à reconstituer un mot donné. Est-ce toujours possible quelque soit la configuration de départ ? Est-ce qu'on peut décrire une méthode pour le faire systématiquement ?

(8) **Pousse-pousse sur un graphe.**
On considère un graphe avec $n+1$ sommets numérotés de 0 à n, tel que chaque sommet du graphe soit relié à exactement 3 autres sommets. On prend n jetons, numérotés de 1 à n et on les places arbitrairement sur n sommets du graphe. Peut-on faire en sorte de remettre chaque jeton sur le sommet de même numéro, en s'autorisant uniquement à faire glisser un jeton sur une arête vers un sommet vide ?

(9) **Compter les coloriages.**
De combien de façons peut-on colorier un cube (ou un tétraèdre ou un octaèdre) avec n couleurs (en mettant une seule couleur par face, mais sans aucune autre contrainte) ?

(10) **Construire des nombres avec des pliages.**
Quels nombres peut-on construire en effectuant des pliages sur une feuille de papier ?

(11) **Sommes et différences de deux carrés.**

- Quels sont les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme différence de deux carrés d'entiers ?
- Quels sont les nombres entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers ?
- Quels sont les nombres entiers a, b et c tels que $a^2 + b^2 = c^2$?