CORRIGÉ du BAC BLANC N°1

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples

1. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \dfrac{4x-6}{(x^2-3x+8)^2}$ est

a. $F(x) = \dfrac{2}{x^2-3x+8}$ $\boxed{b.\, F(x) = \dfrac{-2}{x^2-3x+8}}$ c. $F(x) = \dfrac{2}{(x^2-3x+8)^3}$ d. $F(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+8}$

$$On\ pose\ u(x) = x^2 - 3x + 8.\ On\ a\ donc\ u'(x) = 2x - 3\ et\ donc\ f = 2 \times \frac{u'}{u^2}$$

$$donc\ F = 2 \times \frac{-1}{u} + c = \frac{-2}{u} + c\ donc\ F(x) = \frac{-2}{x^2-3x+8}\ est\ une\ primitive\ de\ f$$

2. On a : $I = \displaystyle\int_0^6 (t^2 - 2t + 3)\,dt$

a. $I = 27$ b. $I = 18$ $\boxed{c.\ I = 54}$ d. $I = 198$

$$On\ pose\ f(t) = t^2 - 2t + 3, donc\ F(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 3t + c$$

$$I = \int_0^6 (t^2 - 2t + 3)\,dt = F(6) - F(0) = (72 - 36 + 18 + c) - (0 + c) = 54$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^2+6x-4}{x-x^3}$

a. -7 b. $+\infty$ $\boxed{c.\ 0}$ d. $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^2+6x-4}{x-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^2+6x-4}{-x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7x^2}{-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-7}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{x} = 0$$

4. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$

$\boxed{a.\ f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ c. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ d. $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2$

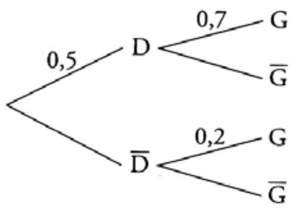
$$Posons\ g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}. Soit\ u(t) = t^2 + 1. On\ a\ u'(t) = 2t\ donc\ g = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}\ donc\ G = \sqrt{u} + c$$

$$donc\ f(x) = \int_{-1}^{x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int_{-1}^{x} g(t)\,dt = G(x) - G(-1) = \sqrt{x^2+1} + c - (\sqrt{2} + c) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$$

EXERCICE 2

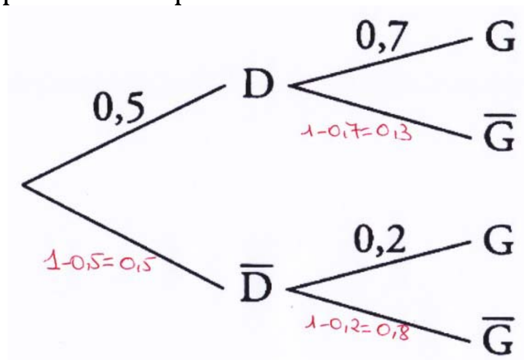
Une salle de jeu comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.
Un jour, l'une des deux est déréglée.
Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console.
   On note :
   D l'événement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'événement contraire ;
   G l'événement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'événement contraire.
   Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités.



   Ainsi, 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi une console déréglée.

a. Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.



b. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».

$$Il\ faut\ calculer\ p(D \cap G)\ et\ \ p(D \cap G) = p(D) \times p_D(G) = 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35$$

c. Calculer la probabilité de l'événement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».

$$Il\ faut\ calculer\ p(\overline{D} \cap G)\ et\ \ p(\overline{D} \cap G) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(G) = 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}10$$

d. Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.

$$p(G) = p(D \cap G) + p(\overline{D} \cap G) = 0{,}35 + 0{,}10 = 0{,}45$$

e. Calculer la probabilité que le joueur ait choisit la console déréglée sachant qu'il a gagné.

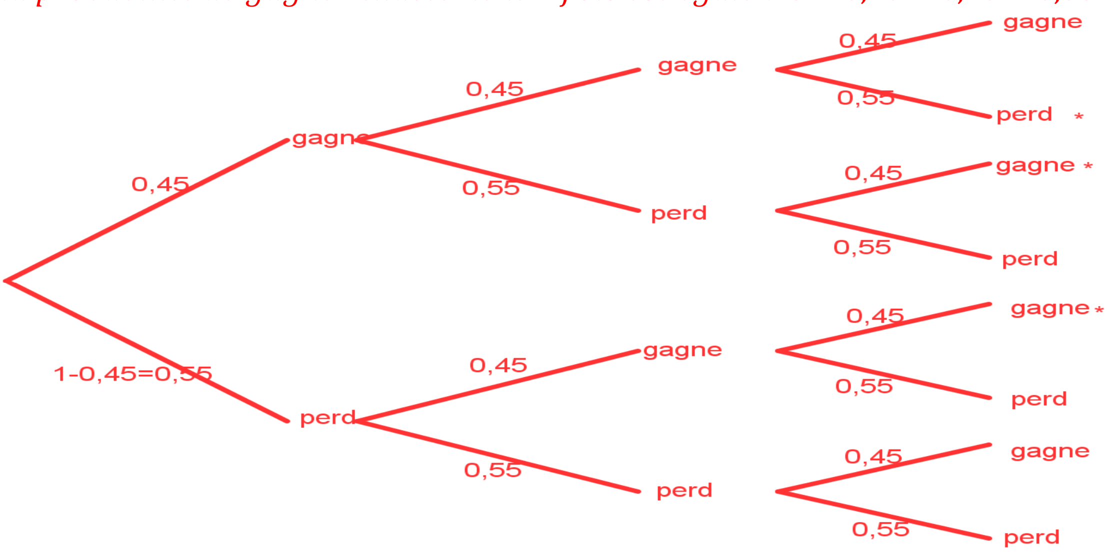
$$Il\ faut\ calculer\ p_G(D) = \frac{p(D \cap G)}{p(G)} = \frac{0{,}35}{0{,}45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} \approx 0{,}785$$

2. Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.
Calculer la probabilité de l'événement « le joueur gagne exactement deux fois ». Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième.

On voit sur l'arbre des probabilités qu'il y a 3 manières de gagner exactement 2 fois

$$p(GGP) = 0{,}45 \times 0{,}45 \times 0{,}55 \quad p(GPG) = 0{,}45 \times 0{,}55 \times 0{,}45 \quad et\ p(PGG) = 0{,}55 \times 0{,}45 \times 0{,}45$$

$$donc\ la\ probabilit\acute{e}\ de\ gagner\ exactement\ 2\ fois\ est\ \acute{e}gale\ \grave{a}\ 3 \times 0{,}45 \times 0{,}45 \times 0{,}55 \approx 0{,}334$$



EXERCICE 3

Partie A

Dans cette partie on fait une étude graphique.
Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. On admet que le coût de fabrication en euros d'un nombre x de lots, x appartenant à l'intervalle [0;18], est donné par la fonction dont la courbe $\mathcal{C}$ est jointe. Chaque lot est vendu 125€.
La recette est donc donnée par $R(x) = 125x$.
La droite $\mathcal{D}$ représentant R est dessinée dans le même repère que $\mathcal{C}$ (voir graphique ci-après).

1. L'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots. Déterminer graphiquement les valeurs du nombre x de lots pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier la réponse.

L'entreprise réalise un bénéfice lorsque les recettes sont supérieures aux dépenses c'est-à-dire quand la courbe des recettes est au-dessus de la courbe des dépenses c'est-à-dire quand la droite $\mathcal{D}$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$, c'est-à-dire pour un nombre de lots compris entre 7 et 17 inclus.

2. a. On appelle M le point d'abscisse 8 qui est sur $\mathcal{C}$. Donner une valeur approchée de son ordonnée.

L'ordonnée de M est égale environ à 600.

b. On appelle N le point d'abscisse 8 qui est sur D. Calculer son ordonnée.

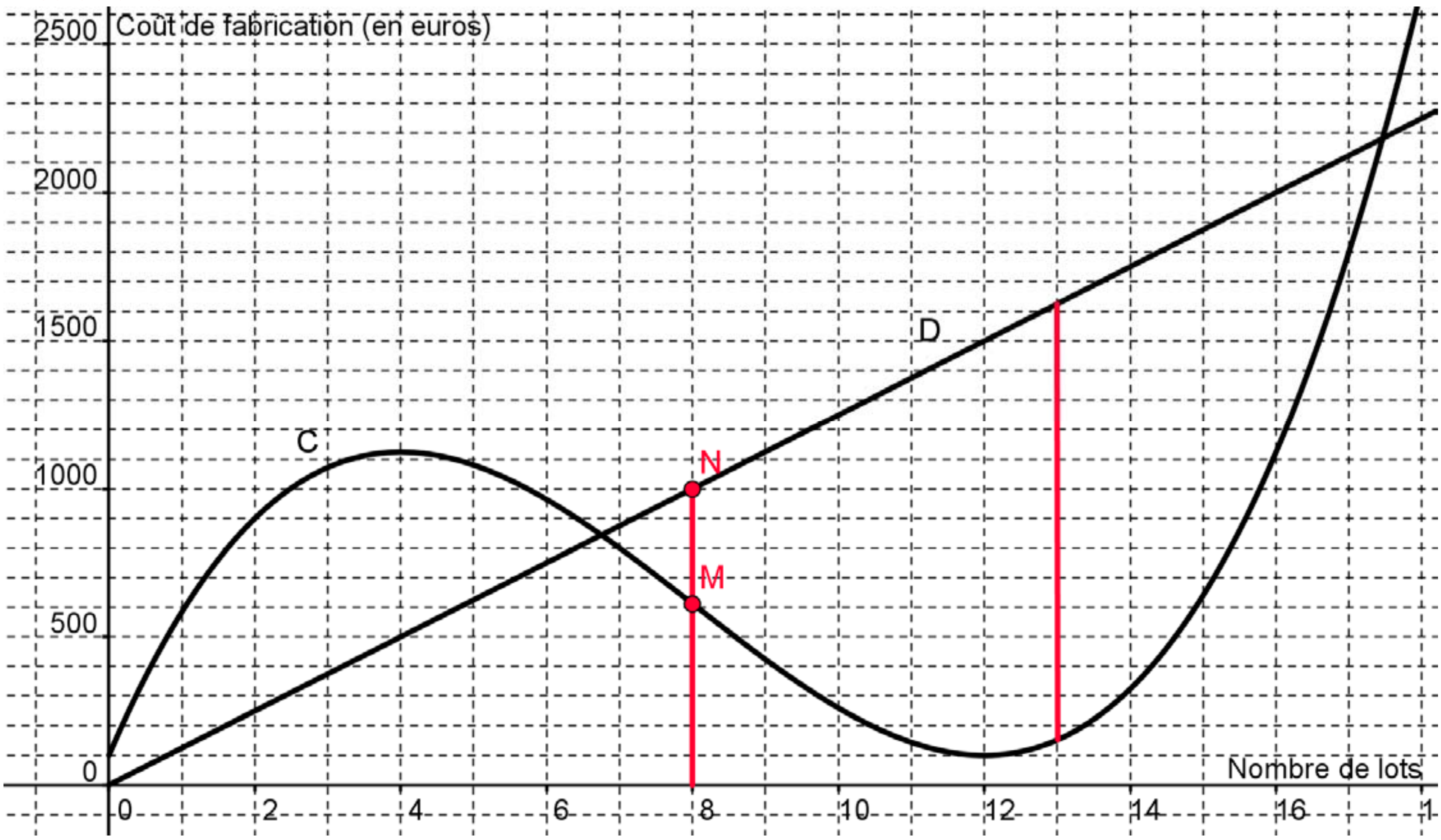
L'ordonnée de N est égale environ à 1000.

c. Mesurer sur le graphique la longueur MN. Que représente-t-elle ?

La longueur MN vaut environ 400. 400€ représente le bénéfice réalisé pour la vente de 8 lots

3. En s'inspirant de la méthode graphique qui précède, donner en le justifiant, le nombre de lots à vendre pour réaliser le bénéfice maximal.

Sur la graphique on voit que la distance maximale entre deux point de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ de même abscisse est obtenue pour $x = 13$. Le nombre de lots que l'on doit vendre pour que le bénéfice soit maximal doit donc être de 13.



Partie B

L'entreprise désire faire une étude plus précise de son bénéfice. On étudie la fonction f définie sur l'intervalle [0;18] par :

$$f(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x + 100.$$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 96 \times 2x + 576 = 12x^2 - 192x + 576$$

2. Vérifier, en développant et en détaillant les calculs, que pour tout x de [0;18]:

$$f'(x) = 12(x-4)(x-12).$$

$$12(x-4)(x-12) = (12x-48)(x-12) = 12x^2 - 144x - 48x + 576 = 12x^2 - 192x + 576$$

On a donc bien $f'(x) = 12(x-4)(x-12)$

3. Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0; 18]$.

$$x - 4 > \Leftrightarrow x > 4 \quad et\ x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 12$$

x	$0 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad 12 \qquad\qquad 18$
$x-4$	$- - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + + + +$
$x-12$	$- - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +$
$f'(x)$	$+ + + + + + + 0 - - - - - - - 0 + + + + + + + +$

4. Etablir le tableau de variation de la fonction f sur [0;18].

On calcule $f(0) = 100 \quad f(4)1124 \quad f(12) = 100 \quad et\ f(18) = 2692$

x	$0 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad 12 \qquad\qquad 18$
$f'(x)$	$+ + + + + + + 0 - - - - - - - 0 + + + + + + +$
$f(x)$	$100 \nearrow 1124 \searrow 100 \nearrow 2692$

La fonction f a pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}$.

5. Recopier et compléter le tableau :

x	12	13	14
$R(x) - f(x)$	$12 \times 125 - 100$ $= 1400$	$13 \times 125 - f(13)$ $1625 - 152$ $= 1473$	$14 \times 125 - f(14)$ $1750 - 324$ $= 1426$

6. a. Que représente la différence $R(x) - f(x)$?

Cette différence représente le bénéfice réalisée pour la vente de x lots

b. Les résultats obtenus dans le tableau de la question 5. sont-ils conformes à ce qui a été constaté graphiquement à la question 4. de la Partie A ?

Les résultats sont bien conformes. Par le calcul, on retrouve aussi un bénéfice maximal pour la vente de 13 lots.

EXERCICE 4 (pour ceux qui n'ont pas l'option math)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3$

et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

1. a. Montrer que $f'(x) = (x-1)(x+3)$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3 \ donc\ f(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$et\ (x-1)(x+3) = x^2 + 3x - 1x - 3 = x^2 + 2x - 3. On\ a\ donc\ bien\ f'(x) = (x-1)(x+3)$$

b. En déduire les variations de la fonction f.

x	$-\infty \qquad\qquad -3 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad +\infty$
$x-1$	$- - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +$
$x-3$	$- - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + + +$
$f'(x)$	$+ + + + + + + + + 0 - - - - - - 0 + + + + + + + +$

On en conclut que f *est croissante sur* $]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$ *et décroissante sur* $[-3; 1]$

2. a. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$On\ a\ f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3 \times (-3) + 3 = -9 + 9 + 9 + 3 = 12$$

$$et\ f(1) = \frac{1}{3} \times 1 + 1 - 3 + 3 = \frac{4}{3}$$

$$Si\ on\ calcule\ f(-6)$$

on trouve que $f(-6) = \frac{1}{3} \times (-6)^3 + (-6)^2 - 3 \times (-6) + 3 = -72 + 36 + 18 + 3 = -15$

x	$-\infty$	-6	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-15	12	$\searrow$ $\frac{4}{3}$	$\nearrow$

D'une part f est continue sur $\mathbb{R}$

si $x \in]-\infty; -6]$ *alors* $f(x) < 0$

si $x \in]-6; -3]$ f *est strictement croissante et continue sur cet intervalle.*

De plus f *change de signe sur cet intervalle*

donc il existe un nombre unique $\alpha \in]-6; -3[$ *tel que* $f(\alpha) = 0$

si $x \in]-3; +\infty]$ *alors* $f(x) \geq \frac{4}{3}$

b. En déduire le signe de la fonction f.

On en conclut que si $x < \propto$, *alors* $f(x) < 0$, *si* $x = \propto$, *alors* $f(x) = 0$ *et si* $x > \propto$, *alors* $f(x) > 0$

Ce nombre α étant un nombre compris entre -6 et -3

3. Soit F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ tel que $F(1) = 2$.

a. Etudier les variations de F.

Puisque F est une primitive de f, cela signifie que f est la dérivée de F

On sait que f est négative pour les valeurs de x inférieures à α et f est positive pour les valeurs de x supérieures à ∝.

On peut donc en conclure que F est décroissante pour les valeurs de x inférieures à ∝ et que F est croissante pour les valeurs de x supérieures à ∝. F atteint donc son minimum en ∝

b. Déterminer les réels a, b, c, d *et* e tels que pour tout x, $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x + c = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + c$$

$$\text{De plus on sait que } F(1) = 2 \text{ or } F(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 + c = \frac{23}{12} + c$$

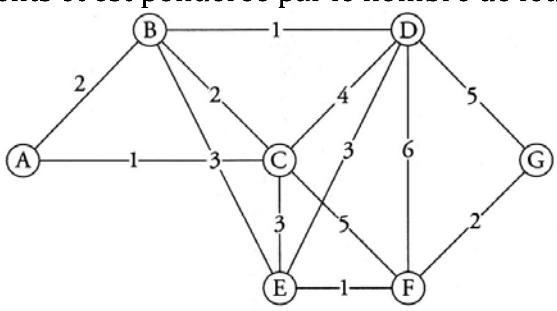
$$\text{donc } \frac{23}{12} + c = 2 \text{ donc } c = 2 - \frac{23}{12} = \frac{1}{12}. \text{ On a donc } F(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{12}$$

c. Calculer $I = \int_1^5 f(t)dt$.

$$I = \int_1^5 f(t)dt = F(5) - F(1) = \left(\frac{625}{12} + \frac{125}{3} - \frac{75}{2} + 15 + \frac{1}{12}\right) - 2 = \frac{856}{12} - 2 = \frac{832}{12} = \frac{208}{3}$$

EXERCICE 5 (Pour ceux qui ont l'option math)

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On s'intéresse au graphe non pondéré.

1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :

   a. Ce graphe est-il connexe ? *Oui car on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre*

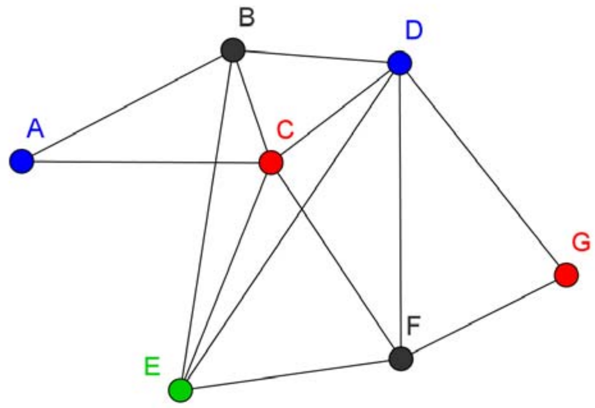
   b. Ce graphe est-il complet ? *Non, car il n'existe pas de chemin direct pour aller de A vers E par exemple*

   c. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? *A a pour degré 2, B a pour degré 4, C a pour degré 5, D a pour degré 5, E a pour degré 4, F a pour degré 4 et G a pour degré 2. Il existe donc une chaîne eulérienne puisqu'il n'y a que 2 sommets de degré impair*.

   d. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? *Non, ce graphe n'admet pas de cycle eulérien puisque certains sommets sont de degré impair.*

2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

CDEF est un sous-graphe complet d'ordre 4, donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.



Voici une possibilité de colorer le graphe avec 4 couleurs, donc le nombre chromatique de ce graphe est égal à 4

Partie B

On s'intéresse au graphe pondéré.

Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.

La réponse sera justifiée par un algorithme.

Il suffit d'utiliser l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	A
	2 A	1 A	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	C
	2 A		5 C	4 C	6 C	$+\infty$	B
			3 B	4 C	6 C	$+\infty$	D
				4 C	6 C	8 D	E
					5 E	8 D	F
						7 F	G

Pour aller de A vers G le parcours qui contient le moins de feux fait le circuit suivant :
A C E F G. Il y a 7 feux.