CORRIGÉ DU BAC BLANC N°2 ES d'Avril 2011

EXERCICE 1 **8 pts (2 pts par bonne réponse et -1 par mauvaise)**

1. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthogonal d'une fonction g définie sur $]2;+\infty[$. Si $\lim_{x\to 2} g(x) = +\infty$, alors

   * La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.
   * La droite d'équation $y = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.
   * La droite d'équation $x = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.
   * La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$ **2 pts**

2. Pour tout nombre réel x, $\ln(4e^x)$ est égal à :

   $* \ x + \ln 4 \qquad * \ 4 + x \qquad * \ 2x \qquad * \ 4x$

$\boldsymbol{\ln(4e^x) = \ln 4 + \ln(e^x) = \ln 4 + x = x + \ln 4}$ **2 pts**

3. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = e^{-x^2}$
et soit f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$. Alors :

   $* \ f'(x) = -x^2e^{-2x} \qquad * \ f'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad * \ f'(x) = e^{-2x} \qquad * \ f'(x) = e^{-x^2}$

On sait que la dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x) \times e^{u(x)}$ donc $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ **2 pts**

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-\ln(x)}$ est égale à ;

   $* \ -\infty \qquad * \ 0 \qquad * \ e \qquad * \ +\infty$

   On sait que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}(1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{1-\ln(x)} = 0$ **2 pts**

EXERCICE 2 (Obligatoire) **12 pts**

Le tableau suivant donne l'évolution du marché des capteurs solaires installés en France métropolitaine entre 2000 et 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i $1 \le i \le 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
Surface de capteurs solaires installés en milliers de m^2 : y_i, $1 \le i \le 8$	6	18	23	39	52	121	220	253

Source : ENERPLAN (Association professionnelle de l'énergie solaire)

L'objectif gouvernemental est d'atteindre un marché d'un million de m^2 en 2010.

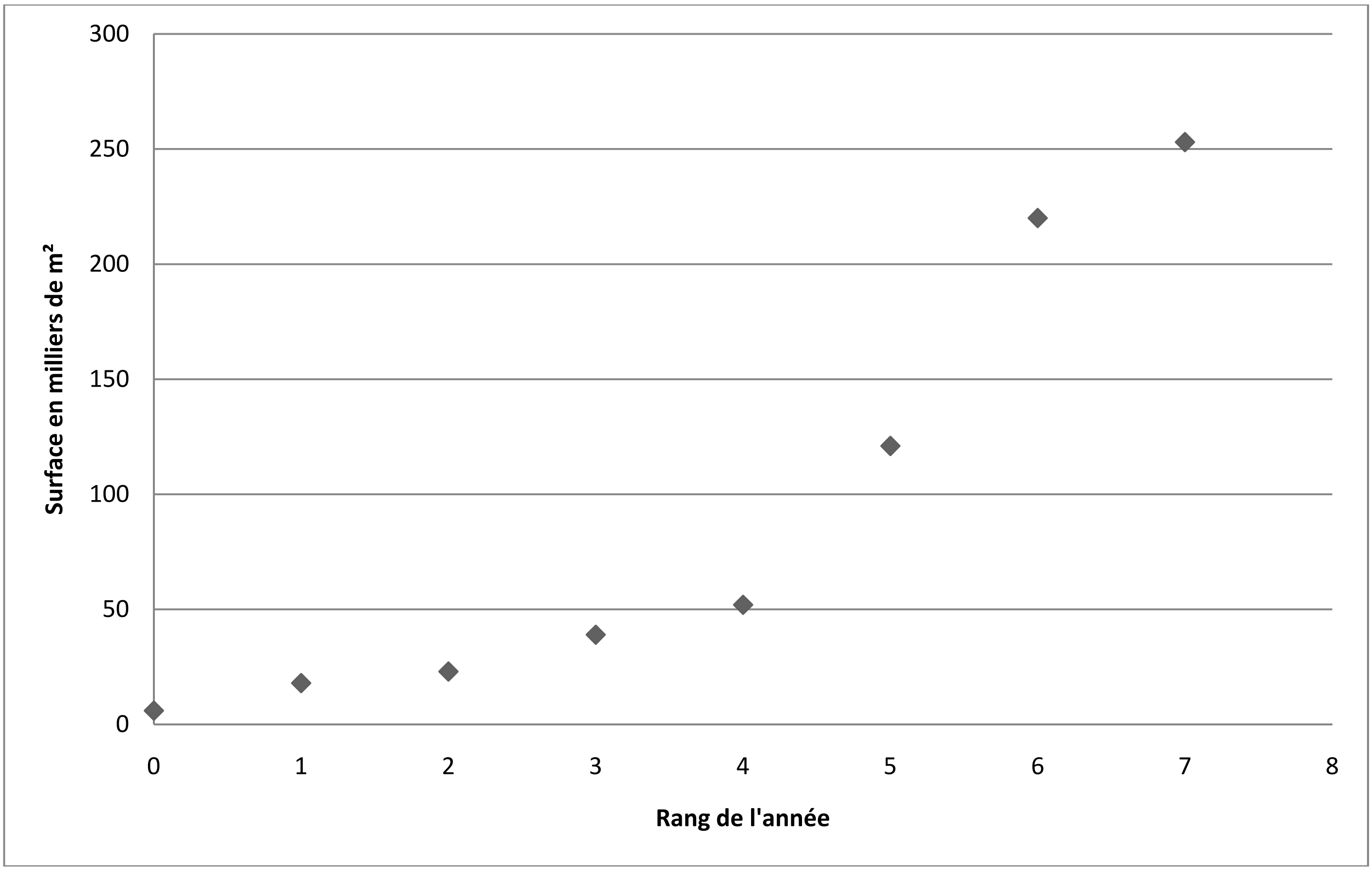
1. a. Calculer le pourcentage d'augmentation de la surface des capteurs solaires installés entre les années 2006 et 2007. **2 pts**

$$t = \frac{253 - 220}{220} = \frac{33}{220} = 0{,}15 = 15\%. \textit{\textbf{ La surface a augmenté de 15\% de 2006 à 2007.}}$$

   b. Si ce pourcentage reste le même d'année en année jusqu'en 2010, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ? **2 pts**

   $253 \times 1{,}15^3 \approx 385$. ***En 2010, si le pourcentage d'augmentation reste le même, la surface sera égale à environ 385 000m², ce qui est loin d'un million de m² l'objectif gouvernemental.***

2. a. Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$; $1 \le i \le 8$, dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour une année en abscisse et en ordonnée 1 cm pour 20 milliers de m^2 de capteurs solaires installés). **2 pts**



b. La forme du nuage suggère de faire un ajustement exponentiel. Pour cela on pose $z_i = ln(y_i)$. Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où les valeurs z_i seront arrondies au centième. **2 pts**

Rang de l'année x_i $1 \leq i \leq 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$ $1 \leq i \leq 8$	1,79	2,89	3,14	3,66	3,95	4,80	5,39	5,53

c. En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au centième. **2 pts**

Avec la calculatrice on trouve que $\boldsymbol{z = 0,52x + 2,06}$

d. On suppose que l'évolution se poursuit de cette façon jusqu'en 2010. À l'aide de cet ajustement exponentiel, estimer en m² la surface de capteurs solaires installés en 2010. Si l'évolution se poursuit selon ce modèle, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ? **2 pts**

Pour 2010, il faut remplacer x par 10.

On trouve alors que $z = 0,52 \times 10 + 2,06 = 7,26$

On a donc $\ln(y) = 7,26$ *donc* $y = e^{7,26} \approx 1\,400$

Avec ce modèle on peut supposer que l'objectif gouvernemental sera largement atteint.

EXERCICE 2 (Spécialité) **12pts**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

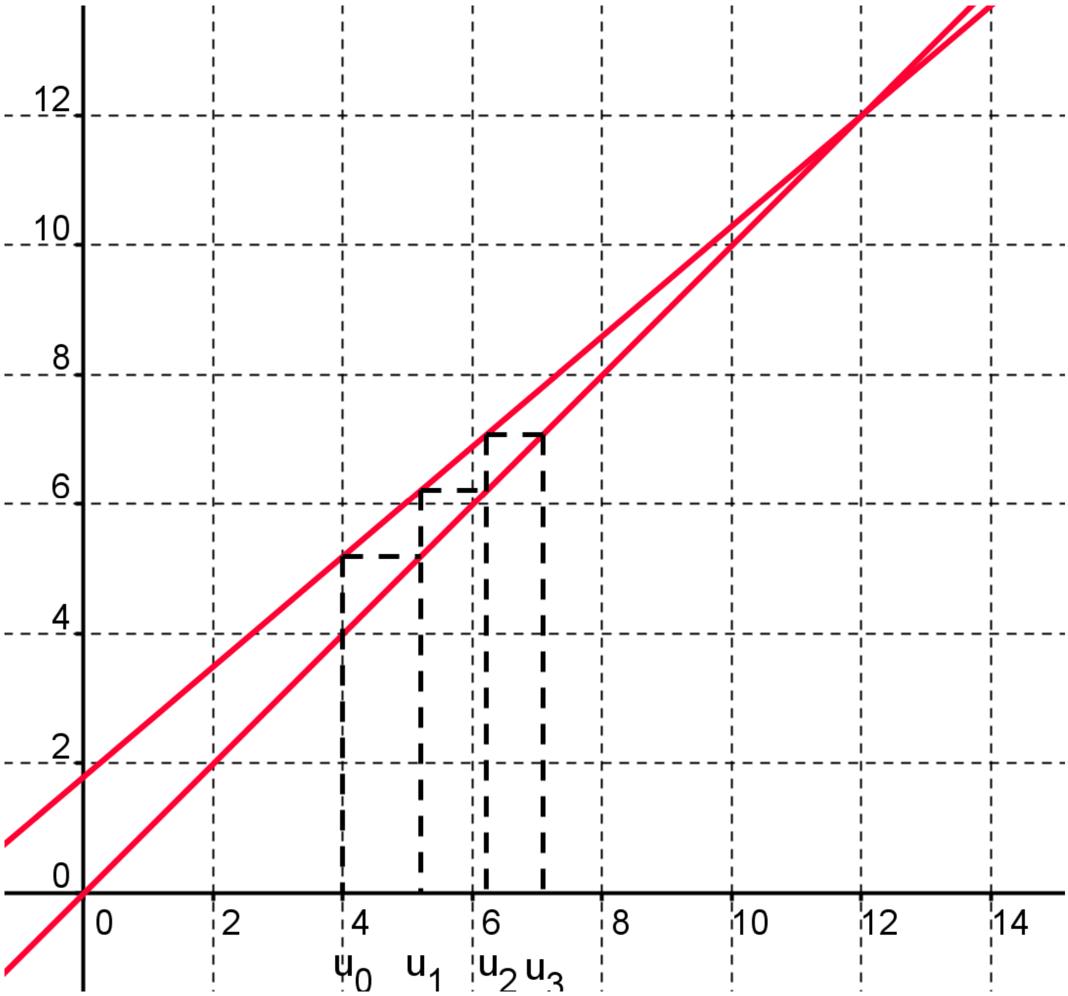
1. Sur une feuille de papier millimétré, construire un repère orthonormé (unité : 1 cm), où l'axe des ordonnées est placé à gauche de la feuille.

a. Dans ce repère, tracer les droites d'équations respectives :
$y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$ **1 pt**

Pour tracer la première droite on peut placer les points $(0; 1,8)$ *et* $(10; 10,3)$

Pour tracer la deuxième droite on peut placer les points $(0; 0)$ *et* $(10; 10)$

b. Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses puis, en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparents les traits de construction. **2 pts**



c. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n). **1 pt**

La limite de la suite (u_n) se trouve au point d'intersection des deux droites.

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 12$

2. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. **2 pts**

On sait que $v_n = u_n - 12$ donc

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0{,}85u_n + 1{,}8 - 12 = 0{,}85u_n - 10{,}2 = 0{,}85(u_n - 12) = 0{,}85v_n$$

$$v_0 = u_0 - 12 = 4 - 12 = -8$$

On en conclut que (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}85$ et de premier terme $v_0 = -8$.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_n = 12 - 8 \times 0{,}85^n$. **2 pts**

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}85$ et de premier terme $v_0 = -8$,

on a donc $v_n = v_0 \times q^n = -8 \times 0{,}85^n$

Comme $v_n = u_n - 12$, on a donc $\boldsymbol{u_n = v_n + 12 = 12 - 8 \times 0{,}85^n}$

c. Donner le sens de variation de la suite (v_n). En déduire celui de la suite (u_n). **1 pt**

$0{,}85^n$ est une suite décroissante (car $0 < 0{,}85 < 1$)

Donc $-8 \times 0{,}85^n$ est une suite croissante.

(v_n) est donc une suite croissante ainsi que (u_n)

d. Déterminer la limite de la suite (u_n). **1 pt**

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}85)^n = 0$ car $0 < 0{,}85 < 1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} 12 - 8 \times (0{,}85)^n = 12$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 12}$

3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :

* il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;

* d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.
En 2008, il y avait 4 000 abonnés.

a. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en (2008+n). **1 pt**

Chaque année, 15% des abonnés ne se réabonnent pas, donc le coefficient multiplicateur est égal à 0,85. D'autre part, tous les ans, il y a 1 800 nouveaux abonnés.

On a donc $u_{n+1} = 0,85 \times u_n + 1,8$ Ce qui correspond à la suite étudiée précédemment.

b. En utilisant la question 2.b., calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2014. **1 pt**

u_0 correspond à 2008 donc 2014 correspond au calcul de u_6

$$u_6 = 12 - 8 \times 0{,}85^6 \approx 8{,}98$$

En 2014, on peut estimer que le nombre d'abonnés sera d'environ 8 980.

EXERCICE 3 **10 pts**

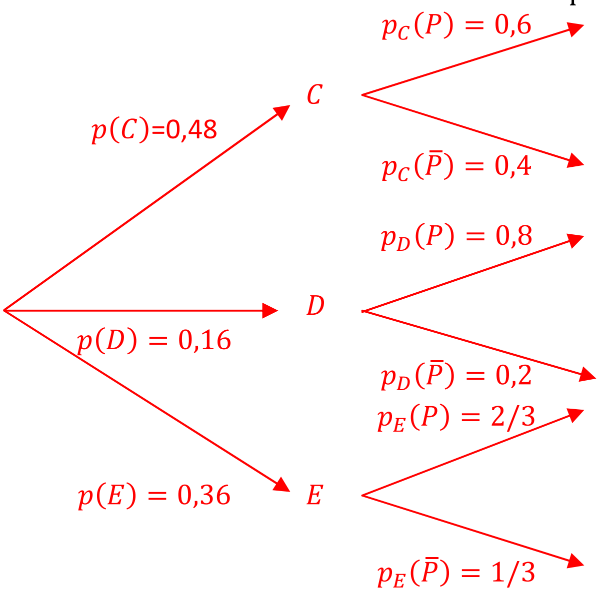
Dans un laboratoire, se trouve un atelier nommé « L'École des Souris ». Dès leur plus jeune âge, les souris apprennent à effectuer régulièrement le même parcours, Ce parcours est constitué de trappes et de tunnels que les souris doivent emprunter pour parvenir à croquer une friandise. Plus la souris effectue le parcours, plus elle va vite.
Une souris est dite « performante » lorsqu'elle parvient à effectuer le parcours en moins d'une minute.
Cette « École » élève des souris entraînées par trois dresseurs : 48 % des souris sont entraînées par Claude, 16 % par Dominique et les autres par Eric.
Après deux mois d'entraînement, on sait que :
* parmi les souris de Claude, 60% sont performantes ;
* 20% des souris de Dominique ne sont pas encore performantes ;
* parmi les souris d'Eric, deux sur trois sont performantes.
On choisit au hasard une souris de cette « École ».
On note C, D, E et P les événements suivants :
* C « la souris est entraînée par Claude » ;
* D « la souris est entraînée par Dominique » ;
* E « la souris est entraînée par Eric » ;
* P « la souris est performante ».

1. a. Déterminer $p(C), p(E), p_D(\bar{P})$ et $p_E(P)$ **4×0,5 = 2 pts**

$$\boldsymbol{p(C) = \frac{48}{100} = 0,48 \quad p(E) = \frac{100-48-16}{100} = \frac{36}{100} = 0,36}$$

$$\boldsymbol{p_D(\bar{P}) = \frac{20}{100} = 0,2 \quad et \;\; p_E(P) = \frac{2}{3}}$$

b. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré. **2 pts**



P : $p(C \cap P) = p(C) \times p_C(P) = 0{,}48 \times 0{,}6 = 0{,}288$

$\bar{P}$: $p(C \cap \bar{P}) = p(C) \times p_C(\bar{P}) = 0{,}48 \times 0{,}4 = 0{,}192$

P : $p(D \cap P) = p(D) \times p_D(P) = 0{,}16 \times 0{,}8 = 0{,}128$

$\bar{P}$: $p(D \cap \bar{P}) = p(D) \times p_D(\bar{P}) = 0{,}16 \times 0{,}2 = 0{,}032$

P : $p(E \cap P) = p(E) \times p_E(P) = 0{,}36 \times \frac{2}{3} = 0{,}240$

$\bar{P}$: $p(E \cap \bar{P}) = p(E) \times p_E(\bar{P}) = 0{,}36 \times \frac{1}{3} = 0{,}120$

2. Déterminer la probabilité de l'événement « la souris est entraînée par Claude et est performante ». **1 pt**

$$\boldsymbol{p(C \cap P) = p(C) \times p_C(P) = 0,48 \times 0,6 = 0,288}$$

3. Démontrer que la probabilité pour une souris d'être performante est de 0,656. **2 pts**

$$p(P) = p(C \cap P) + p(D \cap P) + p(E \cap P) = 0{,}288 + 0{,}16 \times 0{,}8 + 0{,}36 \times \frac{2}{3} = 0{,}288 + 0{,}128 + 0{,}24$$

$$\boldsymbol{p(P) = 0,656}$$

Pour les questions suivantes, on arrondira les résultats au millième.

4. On choisit au hasard une souris parmi celles qui sont performantes. Quelle est la probabilité que cette souris soit entraînée par Dominique ? **1,5 pt**

$$\boldsymbol{Il\ faut\ calculer\ p_P(D) = \frac{p(D \cap P)}{p(P)} = \frac{0,128}{0,656} \approx 0,195}$$

5. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte. On choisit maintenant au hasard quatre souris de cette « École ». On assimile ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une souris performante ? **1,5 pt**

La probabilité d'avoir une souris non performante est égale à $p(\bar{P}) = 1 - 0{,}656 = 0{,}344$

$$La\ probabilité\ d'avoir\ 4\ souris\ non\ performantes\ est\ donc\ égale\ à\ 0{,}344^4$$

La probabilité d'avoir au moins une souris performante est donc égale à $\boldsymbol{1 - 0,344^4 \approx 0,986}$

EXERCICE 4 **10 pts**

Le plan est rapporte à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x(1 - \ln(x))$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (on rappelle que la limite en 0 de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $u(x) = x \ln x$ est 0). **2×1=2pts**

$$On\ a\ f(x) = 2x(1 - ln\,x) = 2x - 2x\,ln\,x$$

$$On\ sait\ que\ \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty\ et\ que\ \lim_{x \to +\infty} 1 - ln\,x = -\infty\ donc\ \lim_{x \to +\infty} \big(2x(1 - \ln x)\big) = -\infty$$

$$\boldsymbol{On\ a\ donc\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

$$On\ a\ f(x) = 2x(1 - ln\,x) = 2x - 2x\,ln\,x$$

$$On\ sait\ que\ \lim_{x \to 0} 2x = 0\ et\ que\ \lim_{x \to 0}(2x \ln x) = 0\ donc\ \lim_{x \to +\infty} (2x - 2x \ln x) = 0$$

$$\boldsymbol{On\ a\ donc\ \lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

b. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ où f' est la fonction dérivée de f. **1,5 pt**

$$Posons\ u(x) = 2x\ et\ v(x) = 1 - ln\,x$$

$$On\ a\ u'(x) = 2\ \ et\ v'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$On\ sait\ que\ f'(x) = (u'v + v'u)(x)$$

$$donc\ \boldsymbol{f'(x)} = 2(1 - ln\,x) - \frac{1}{x} \times 2x = 2 - 2\,ln\,x - 2 = \boldsymbol{-2\,ln\,x}$$

c. Étudier le signe de $f'(x)$pour $x \in]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. **1,5 pt**

$$-2\,ln\,x > 0 \Leftrightarrow ln\,x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$f(1) = 2 \times 1 \times (1 - ln\,1) = 2 \times 1 = 2$$

$\boldsymbol{x}$	**0**		**1**		$+\infty$
$\boldsymbol{f'(x)}$		+ + + + + + + + +	**0**	− − − − − − − − −	
$\boldsymbol{f(x)}$	**0**	↗	**2**	↘	$-\infty$

2. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A. **1 pt**

$$f(x) = 2x(1 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \text{ car } x \text{ ne peut pas être nul}$$

$$Or\ 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\textbf{donc } \boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e}\textbf{. Le point A a donc pour coordonnées } \boldsymbol{(e; 0)}$$

3. a. Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geq 0$ dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$? **1 pt**

$$\boldsymbol{f(x) \geq 0} \Leftrightarrow 2x(1 - \ln x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{0} < x \leq e$$

La courbe C est donc au-dessus de l'axe des abscisses pour les valeurs de x comprises entre 0 et e.

b. Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$. **1,5 pt**

Il suffit de démontrer que la dérivée de F est f

$$Posons\ u(x) = x^2 \text{ et } v(x) = \frac{3}{2} - \ln x$$

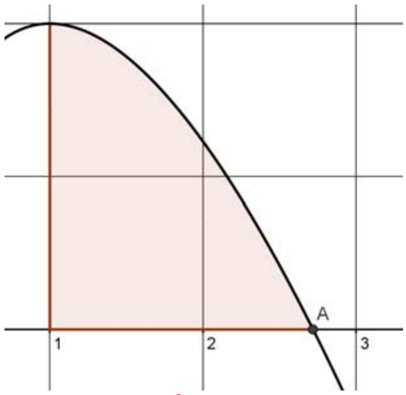
$$On\ a\ u'(x) = 2x \text{ et } v'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$On\ sait\ que\ F'(x) = (u'v + v'u)(x)$$

$$donc\ F'(x) = 2x\left(\frac{3}{2} - \ln x\right) - \frac{1}{x} \times x^2 = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x = 2x(1 - \ln x) = f(x)$$

La dérivée de F est f donc F est bien une primitive de f

c. On désigne par D le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de D puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près. **1,5 pt**



$$Il\ faut\ calculer \int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1)$$

$$or : F(e) = e^2\left(\frac{3}{2} - \ln e\right) = e^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{e^2}{2}$$

$$et : F(1) = 1^2\left(\frac{3}{2} - \ln 1\right) = 1\left(\frac{3}{2} - 0\right) = \frac{3}{2}$$

$$donc \int_1^e \boldsymbol{f(x)\,dx = F(e) - F(1) = \frac{e^2 - 3}{2} \approx 2,19}$$

$$\boldsymbol{L'aire\ de\ D\ mesure\ environ\ 2,19\ unités}$$