Chapitre 12: Intégration

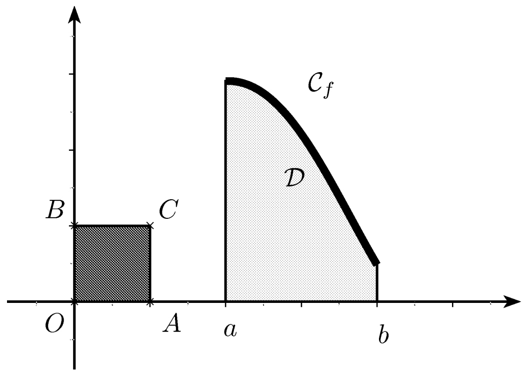
1 Aire sous la courbe

Théorème: (admis)
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OA},\vec{OB})$ et l'aire du rectangle $OABC$ est l'unité d'aire.

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donnée par :

$$\mathcal{D} = \int_a^b f(t)\,dt$$

On dit que $\mathcal{D}$ est l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ pour $x \in [a;b]$.



2 Valeur moyenne d'une fonction

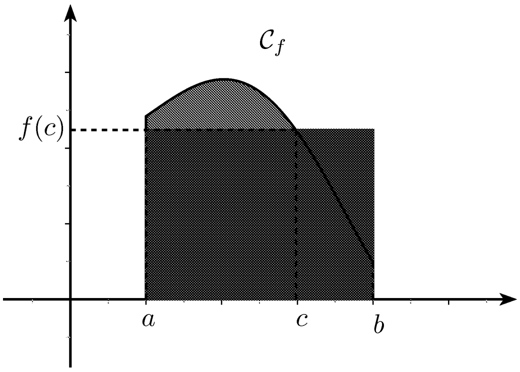
Définition:
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$). La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Théorème: (admis)
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$). Il existe un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c)$ est égal à la valeur moyenne de f sur $[a;b]$. On a alors :

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Remarque:
Supposons que f soit positive sur $[a;b]$, l'égalité ci-dessus signifie que l'aire sous la courbe entre a et b est égale à l'aire du rectangle colorié en vert.



3 Linéarité de l'intégrale

Théorème:
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b sont deux réels quelconques de I, alors :

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

On dit que l'intégrale de la somme est la somme des intégrales.

Théorème:
f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels quelconques de I et α est un réel quelconque alors :

$$\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$$

4 Signe de l'intégrale d'une fonction de signe constant

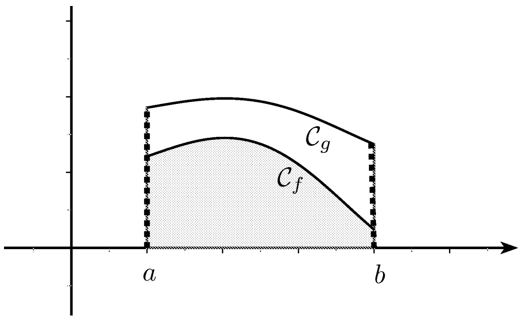
Théorème:
f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels quelconques de I. Lorsque $a \leq b$:

- *si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$*
- *si $f \leq 0$ sur I alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq 0$*

Théorème:
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b sont deux réels quelconques de I, alors pour $a \leq b$:

$$\text{si } f \leq g \text{ sur } [a;b] \text{ alors } \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$

Remarque:
Lorsque que f et g sont positives sur $[a;b]$, l'inégalité ci-dessus signifie que l'aire sous la courbe de f entre a et b est inférieure l'aire sous la courbe de g entre a et b



5 Relation de Chasles

Théorème:
f est une fonction continue sur un intervalle I ; Alors quels que soient les réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

Remarque:
Lorsque que f est positive sur $[a;c]$ et lorsque $a \leq b \leq c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires : l'aire de la réunion des deux domaines adjacents est égale à la somme des aires de chacun d'eux.