

Chapitre 1: Continuité

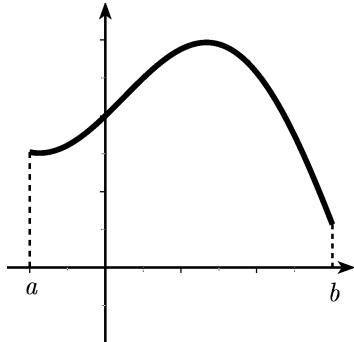
1 Approche graphique

Définition:

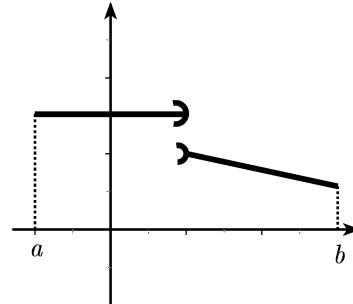
f est une fonction définie sur un intervalle I .

La fonction f est **continue** sur l'intervalle I lorsque la courbe de la fonction f se trace d'un trait continu sur cet intervalle.

Exemples:



La fonction ci-dessus est continue sur l'intervalle $[a; b]$



La fonction ci-dessus n'est pas continue sur l'intervalle $[a; b]$

2 La fonction partie entière

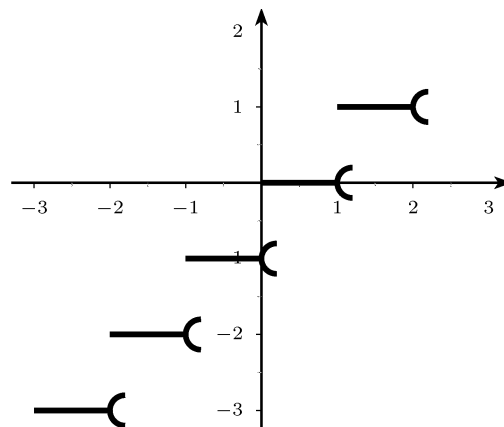
Définition:

La partie entière d'un nombre réel x , notée $E(x)$, est définie par :

$$\text{si } x \in [n; n + 1[\text{ avec } n \in \mathbb{Z}, E(x) = n$$

Représentation graphique :

Voici la représentation graphique de la fonction $x \mapsto E(x)$ pour $x \in [-3; 2[$:



3 Le théorème de la valeur intermédiaire

Définition:

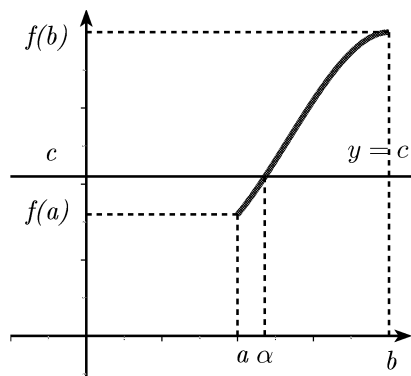
f est une strictement monotone sur un intervalle si f est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur cet intervalle.

Théorème:

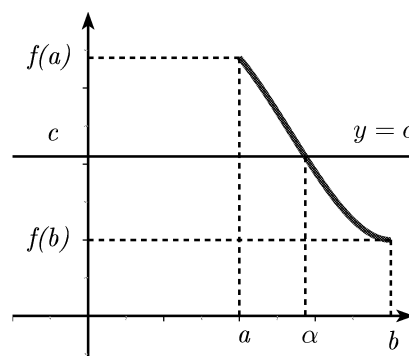
Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Cela signifie que pour tout nombre c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique nombre α de l'intervalle $[a; b]$ tel que :

$$f(\alpha) = c$$

Exemples:



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$

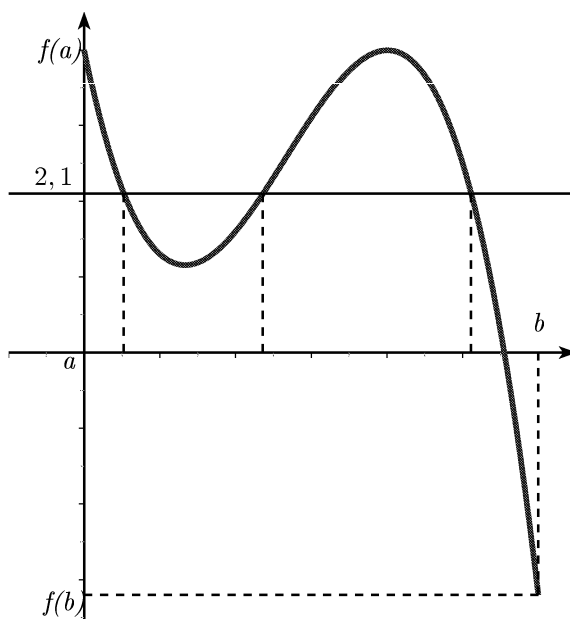
Remarques:

- Dans un tableau de variation, on conviendra que les flèches obliques de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

x	2	5	12
$f(x)$	4	9	-3

La fonction f dont le tableau de variation est donnée ci-dessus est définie sur $[2; 12]$ et grâce au théorème de la valeur intermédiaire, on peut affirmer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [5; 12]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ mais non-strictement monotone, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise au moins une fois par f .



Ici la valeur 2,1 est prise trois fois par la fonction f .