Chapitre 2: Dérivation

1 Rappel : Nombre dérivé et fonction dérivée

a) Nombre dérivé

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

- *f est **dérivable** en a si la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite fini l en 0.*
- *Ce réel l est appelé le **nombre dérivé** de f en a et est noté $f'(a)$.*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *est le taux de variation entre a et $a+h$.*

b) Fonction dérivée

Définition:
*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en tout point x de l'intervalle I, la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f et est noté f'.*

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$
x^n	nx^{n-1}	$\begin{cases} \mathbb{R} & pour\, n \geq 2 \\ \mathbb{R}^\star & pour\, n \leq -1 \end{cases}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Opérations et dérivées u et v sont deux fonctions dérivables sur I

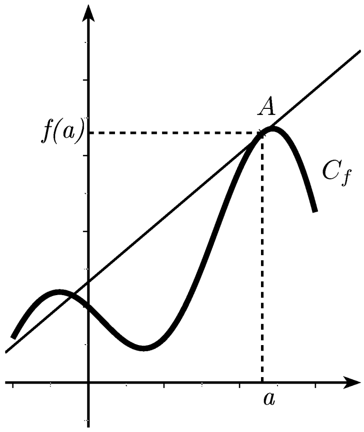
$f(x)$	$f'(x)$	f est dérivable sur
$u+v$	$u'+v'$	I
$k \times u$	$k \times u'$	I
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$I - \{x \mid v(x) = 0\}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$I - \{x \mid v(x) = 0\}$

Théorème:
- *Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.*
- *Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.*

2 Equation d'une tangente à une courbe

Définition:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a un nombre réel de I et C_f la courbe représentative de f dans un repère.

*La **tangente** à C_f au point $A(a; f(a))$ est la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.*



Théorème:
La tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

3 Etude d'une fonction

a) Lien entre sens de variation et signe de la dérivée

Théorème:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- *Si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*
- *Si $f'(x) = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*
- *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$), sauf en un nombre fini de points où f' s'annule sur I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a; b]$.*

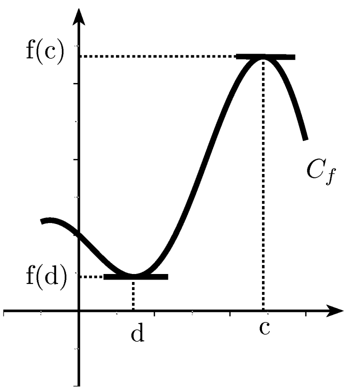
b) Extremum local

c est un réel de l'ensemble de définition de la fonction f.

Définition:
*$f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) si l'on peut trouver un intervalle <u>ouvert</u> I contenant c tel que :*

$$\textit{pour tout } x \in I, \quad f(x) \leq f(c) \ (\textit{resp.} f(x) \geq f(c)\ )$$

Rappel :



On appelle **extremum local**, un maximum local ou un minimum local comme respectivement $f(c)$ et $f(d)$ ci-dessus.

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et c un réel de I.

$$\textbf{\textit{Si}}\ f \textit{ admet un extremum en } c\ \textbf{\textit{alors}}\ f'(c) = 0.$$

La tangente à la courbe C_f au point $(c; f(c))$ est alors horizontale.

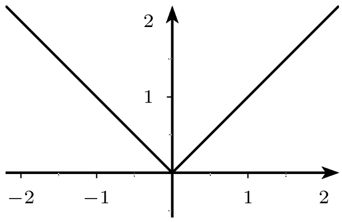
Remarque:
Si $f'(c) = 0$ alors f n'admet pas nécessairment un extremum local en f !

4 Théorème de la valeur intermédiaire

Le théorème suivant est admis :

Théorème:
Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

Remarque:
L'affirmation réciproque (Toute fonction continue sur I est dérivable sur I) est fausse.



La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0. En effet :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad et \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Si $f' > 0$ sur $I =]a;b[$ alors f est strictement croissante sur $[a;b]$ donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire vu au chapitre précédent, on peut énnoncé le théorème suivant :

Théorème:
Si $f' > 0$ sur $I =]a;b[$ ou si $f' < 0$ sur $I =]a;b[$ alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarques:

- *Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est compris entre ces deux valeurs. Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut affirmer que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]a;b[$.*

- *Le théorme précédent s'étend aux cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Par exemple, si $f' > 0$ sur $I =]3;+\infty[$, $f(3) = 1$ et*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

alors f prend une unique fois toute valeur de l'intervalle $]1;2[$.