Chapitre 3: Fonctions composées

1 Définition

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $[-8;+\infty[$ par $f(x) = x+8$ et g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

$$x \overset{f}{\longmapsto} x+8 \overset{g}{\longmapsto} g(x+8) = \sqrt{x+8}$$

On obtient ainsi une fonction h définie sur $[-8;+\infty[$ par $h(x) = \sqrt{x+8}$. On dit que h est la <u>*composée de f suivie de g*</u>.
On note :

$$h = g \circ f$$

qui se lit "h égale g rond f". Ainsi pour tout $x \geq -8$,

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Définition:
La fonction $g \circ f$ est définie par :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Remarque:
On note D_f et D_g les domaines de définition respectifs de f et g. On ne peut calculer $g[f(x)]$ que si $x \in D_f$ et $h(x) \in D_g$

2 Dérivation d'une fonction composée

Théorème:
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J, u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout nombre réel $x \in I$, $u(x) \in J$. Alors la fonction $f = g \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$$

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+8}$.
On remarque que f est la composée de la fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2+8$ et de la fonction g définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
On a :

$$f(x) = g[u(x)]$$

De plus $u'(x) = 2x$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x) = u'(x)g'[u(x)] = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+8}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$$

3 Sens de variation d'une fonction composée

Théorème:
Soit u, g et f des fonctions telles que $f = g \circ u$, alors :

- *si u et g ont le même sens de variation, alors $f = g \circ u$ est croissante.*
- *si u et g ont des sens de variation différents, alors $f = g \circ u$ est décroissante.*

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^3$.
On remarque que f est la composée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -x+2$ et de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.
De plus u est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$ et g est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) = g[u(x)]$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.