

Chapitre 4: Limites

1 Limites des fonctions usuelles

Voici un récapitulatif des limites des fonctions usuelles aux bornes de leur domaine de définition :

La fonction carré : $x \mapsto x^2$	La fonction cube : $x \mapsto x^3$	La fonction racine : $x \mapsto \sqrt{x}$	La fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$	
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

2 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions dont on connaît la limite en un réel a (ou en $-\infty$ ou en $+\infty$). La question légitime que l'on peut se poser est :

Les fonctions $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ont-elles une limite et si oui quelle est-elle ?

2.1 Limite d'une somme

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors la limite de $(f + g)$ en a est	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

FI signifie **forme indéterminée**, c'est à dire qu'on doit effectuer une étude particulière pour déterminer la limite de $(f + g)$.

Exemples:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2 - \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \frac{1}{x} = +\infty$$

2.2 Limite d'un produit

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et la limite de g en a est	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors la limite de $(f \times g)$ en a est	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \sqrt{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x})(3 + \frac{1}{x}) = 6$$

2.3 Limite d'un quotient

On distingue ici deux cas :

- le dénominateur a une limite non-nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l et l' sont deux réels et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{+\infty}{-\infty}$
et la limite de g en a est	$l' \neq 0$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\frac{+\infty}{-\infty}$
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{1}{x} = -2 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{-2 + \frac{1}{x}} = -\infty$$

- le dénominateur a une limite nul :

Théorème:

Dans le tableau suivant, l est un réel non-nul et a est soit un réel soit $-\infty$ ou soit $+\infty$.

Si la limite de f en a est	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
et la limite de g en a est	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors la limite de $\frac{f}{g}$ en a est	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + 7 = 7 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 7}{\sqrt{x}} = +\infty$$

3 Formes indéterminées

D'après ce qui a été vu précédemment, on compte quatre formes indéterminées :

$${}^{\circ}\infty - \infty{}^{\circ} \quad {}^{\circ}0 \times \infty{}^{\circ} \quad {}^{\circ}\frac{\infty}{\infty}{}^{\circ} \quad {}^{\circ}\frac{0}{0}{}^{\circ}$$

Dans ce cas, il faut faire une étude particulière pour "lever l'indétermination".

Nous allons ici étudier de façon général les limites à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles pour lever immédiatement les éventuelles indétermination.

3.1 Limites à l'infini des fonctions polynômes

Théorème:

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle de son monôme de plus haut degré.

Exemple:

Soit la fonction polynôme $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 8$, son monôme de plus haut degré est $5x^3$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3.2 Limites à l'infini des fonctions rationnelles

Théorème:

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ (ou en $-\infty$) est celle du quotient des monômes de plus haut degré.

Exemple:

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{5x^3 - 7x^2 + 3x - 8}{-6x^4 + 2}$, son monôme de plus haut degré au numérateur est $5x^3$ et son monôme de plus haut degré au dénominateur est $-6x^4$:

$$\text{Pour } x \neq 0, \quad \frac{5x^3}{-6x^4} = -\frac{5}{6x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{6x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4 Limite de fonction composée

Chacune des lettres a , b et c désigne soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Théorème:

Soit f , g deux fonctions, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = c$$

Exemple:

Étude de la limite en 4 de $\frac{1}{(x-4)^2}$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x-4)^2 = 0^+$$

Posons $X = (x-4)^2$ alors

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$$

Conclusion :

$$\lim_{X \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$$

5 Théorème de comparaison

Théorème:

L désigne un réel, si pour tout x d'un intervalle $]b; +\infty[$:

$$u(x) \leq f(x) - L \leq v(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Le théorème suivant dit qu'une fonction plus grande qu'une autre fonction qui tend vers $+\infty$ tend elle aussi vers $+\infty$.

Théorème:

Si pour tout x d'un intervalle $]b; +\infty[$:

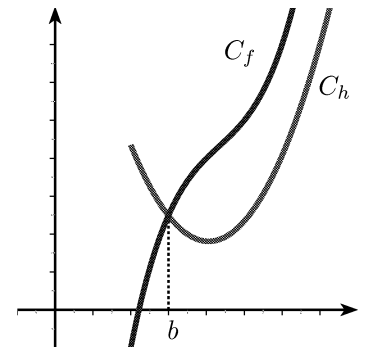
$$h(x) \leq f(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Le théorème suivant dit qu'une fonction plus petite qu'une autre fonction qui tend vers $-\infty$ tend elle aussi vers $-\infty$.

Théorème:

Si pour tout x d'un intervalle $]b; +\infty[$:

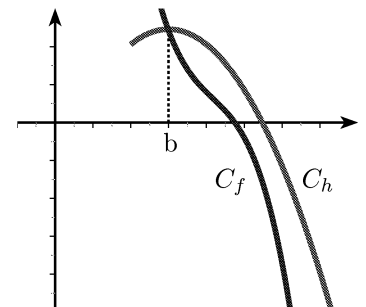
$$f(x) \leq h(x)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



Remarque:

Les trois théorèmes suivants sont aussi valables lorsqu'on prend la limite en un réel a ou en $-\infty$.