

Adéquation à une loi équirépartie

Imaginons que l'on dispose d'une pièce de monnaie dont on souhaite savoir si elle est bien équilibrée ou non. On la lance 50 fois (on peut difficilement envisager de la lancer un très grand nombre de fois à la main) et on obtient 28 fois PILE et 22 fois FACE.

Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est bien équilibrée ou non ?

En fait, on ne peut être sûr de rien mais on peut, d'un point de vue statistique, avoir une idée plus ou moins valide de la réponse grâce aux simulations. En effet, si on simule (par ordinateur par exemple) 1000 fois l'expérience consistant à lancer 50 fois une pièce de monnaie bien équilibrée, on réalisera qu'une proportion pas forcément négligeable de ces 1000 expériences a obtenu effectivement 28 fois PILE et 22 fois FACE.

On peut donc considérer que l'événement "28 fois PILE et 22 fois FACE" obtenu lors de nos 50 lancers n'est pas si improbable que ça. On pourra ainsi décider si notre pièce est, elle aussi, bien équilibrée (au risque de commettre une erreur).

Nous sommes donc confrontés une question importante :

Quels sont les critères de décisions pour dire que la pièce est équilibrée ?

Voilà pour le principe. Voyons maintenant, plus en détails, les calculs et la méthode.

A. Étude statistique à l'aide du tableur

Notons $\mathcal{E}$ l'expérience qui consiste à lancer 50 fois une pièce de monnaie. On va simuler, sur ordinateur, 1000 fois l'expérience $\mathcal{E}$ pour une pièce bien équilibrée, c'est à dire qui a autant de chance de tomber sur PILE que sur FACE.

1. a. Ouvrir le fichier 1000simulations.ods¹ avec le logiciel Calc d'OpenOffice.
- b. Dans l'onglet 1000 simulations, entrer pour toutes les cellules de la plage **B7:AY1006** la formule suivante :
`=SI(ENT(ALEA()*2);"P";"F")`

La formule **ENT(ALEA()*2)** donne aléatoirement 0 ou 1. On associe à 0 le résultat PILE noté P et à 1 le résultat FACE noté F grâce à la fonction **SI(test ;valeur si test vrai ;valeur sinon)** du logiciel.

- c. Entrer dans le cellule **AZ7** la formule `=NB.SI(B7:AY7;"P")` puis recopier la jusqu'en **AZ1006**.
 - d. Que calcule cette formule ?
 - e. Entrer dans le cellule **B2** la formule `=NB.SI($AZ7:$AZ1006;B1)` puis recopier la jusqu'en **AD2**.
 - f. Que calcule cette formule ?
2. On a réalisé 1000 fois l'expérience $\mathcal{E}$ et consigné les résultats dans ce dernier tableau.
 - a. Sur les 1000 expériences, combien ont donné 28 fois PILE ?
 - b. Quelle pourcentage de l'effectif total des 1000 expériences cela représente ?
 3. On va à présent représenter ces résultats par un diagramme en barre : Sélectionner la plage de donnée **A1:AD2** puis cliquer sur l'assistant graphique et choisir :
 - Type de diagramme : diagramme en colonne et en 3D ;
 - Plage de données : séries de données en lignes et première ligne comme étiquette.
 Agrandir le diagramme obtenu sur toute la largeur de votre écran.

De nombreuses expériences montrent que sur 50 lancers, le nombre de PILE ou FACE n'est pas forcément voisin, bien que les calculs aient été faits pour une pièce bien équilibrée. (Phénomène de fluctuation de l'échantillonnage vu en seconde)

1. enregistrer ce fichier dans vos documents et faites régulièrement des sauvegardes

On rappelle que la fréquence théorique d'obtenir PILE est $\frac{1}{2}$, tout comme la fréquence théorique d'obtenir FACE.

$$D_{obs}^2 = \left(f_P - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(f_F - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$D_{obs}^2 = \left(\frac{28}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{22}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{1250}$$

On va calculer la quantité $1250D^2$ pour chaque résultat de la simulation à l'aide du tableur.

1. Recopier les valeurs de la plage **B2:AD2** de l'onglet 1000 expériences dans la plage **B2:AD2** de l'onglet effectifs cumulés croissants.
2. Entrer dans le cellule **B3** la formule $=1250*((B1/50-0,5)^2+(1-B1/50-0,5)^2)$ puis recopier la jusqu'en **AD2**.
3. Compléter les tableaux ci-dessous :

[illegible][illegible]

4. Réorganiser les données en complétant le tableau des valeurs de $1250D^2$ suivant les effectifs cumulés et les effectifs cumulés croissants :

[illegible]

C. Un critère de décision

Maintenant, nous allons décider, suivant une marge d'erreur fixée à l'avance, si nous considérons que notre pièce peut être envisagée comme bien équilibrée ou non. Pour cela, tout dépend de la position de notre $1250D_{obs}^2$ dans le tableau ci-dessus. La règle de décision usuelle est la suivante :

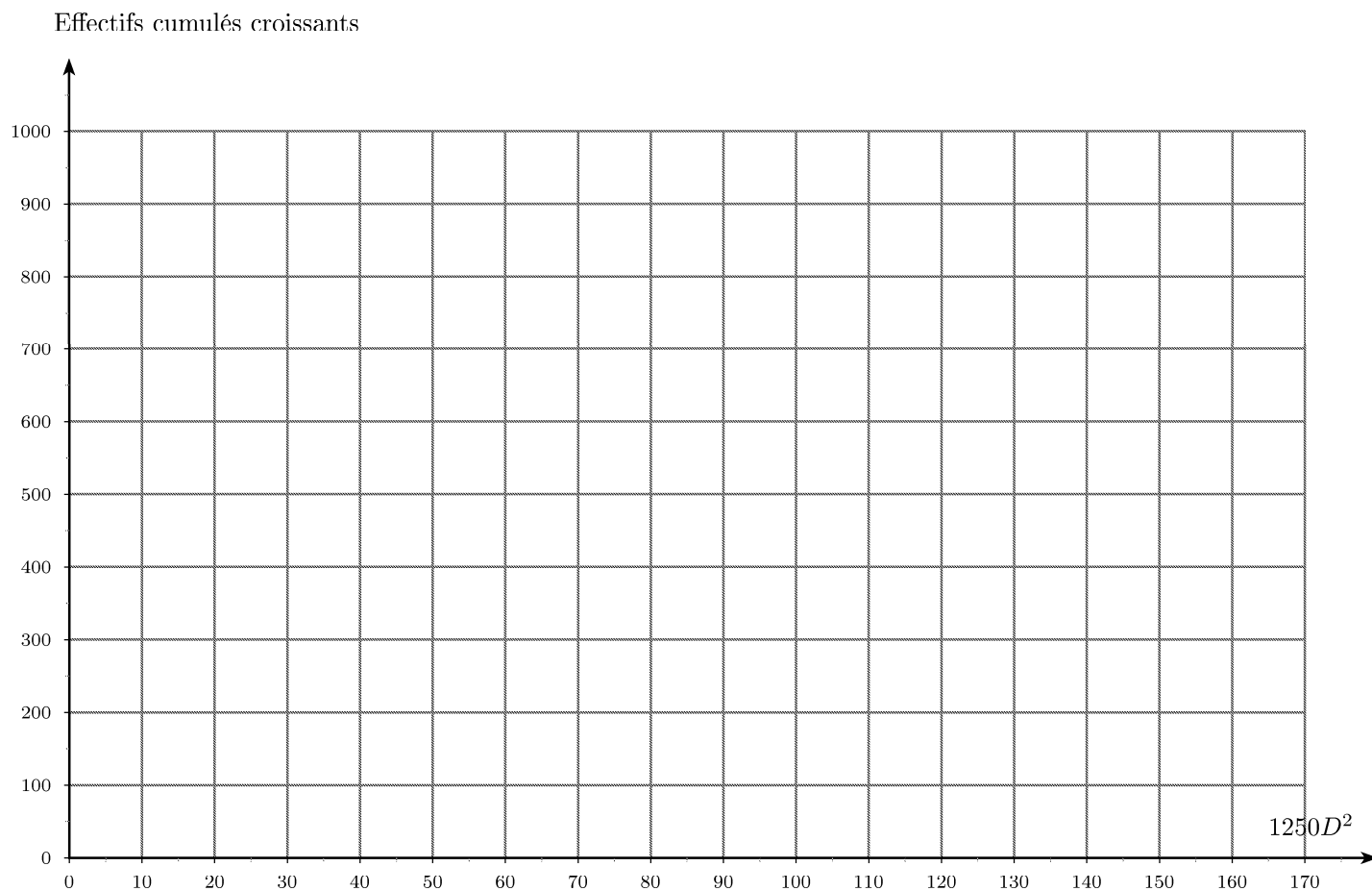
On se donne une marge d'erreur de 10 %, on raisonne donc par à rapport aux déciles :

→ si $1250D_{obs}^2 \leq D_9$ (neuvième décile), alors on considère que le modèle observé suit la loi d'équipartition

→ si $1250D_{obs}^2 > D_9$, alors on considère que le modèle observé ne suit pas la loi d'équipartition.

Dans notre situation, pour calculer le neuvième décile D_9 qui est défini comme un réel tel qu'au moins 90% de l'effectif total ait une valeur inférieure ou égale à D_9 , on prend parmi les valeurs de $1250D^2$ celles qui sont inférieures ou égales à 900

1. Tracer ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants :



2. A l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants, déterminer le neuvième décile de la série statistique des 1000 expériences $\mathcal{E}$.

3. En déduire si le modèle observé suit la loi d'équipartition avec une marge d'erreur de 10 %, c'est à dire si la pièce de monnaie de notre étude est équilibré avec une marge d'erreur de 10 %.

D. Ma pièce de monnaie est-elle équilibrée ?

Prenez une pièce de monnaie dans votre porte-monnaie. L'objectif de cette partie est de décider si cette pièce est bien équilibrée.

1. A l'aide d'une pièce de monnaie, réaliser l'expérience $\mathcal{E}$ et noter vos résultats dans le tableau ci-dessous :

Résultat	PILE	FACE
Effectifs		

2. Calculer $1250D_{obs}^2$.

3. En déduire si votre pièce de monnaie est équilibré avec une marge d'erreur de 10 %.