Chapitre 5: Probabilités

1 Probabilités conditionnelles

Définition:
Pour $p(A) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre, noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemple:
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on se pose la question suivante :

Sachant que la carte tirée est une figure, quelle est la probabilité que ce soit un roi ?

Notons R l'évènement "la carte tirée est un roi" et F l'évènement "la carte tirée est une figure". On a :

$$p(F \cap R) = \frac{4}{32} \qquad \textit{et} \qquad p(F) = \frac{12}{32}$$

La probabilité que la carte tirée soit un roi sachant que cette carte est une figure est notée $p_F(R)$ et

$$p_F(R) = \frac{p(F \cap R)}{p(F)} = \frac{\frac{4}{32}}{\frac{12}{32}} = \frac{1}{3}$$

Remarque:
Pour $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$, on a :

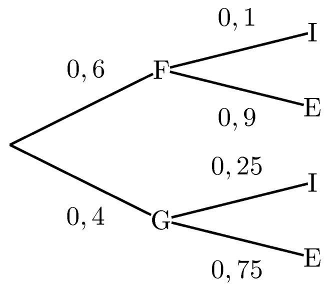
$$p(A \cap B) = p_A(B)p(A) = p_B(A)p(B)$$

2 Arbres pondérés

Pour un lycée de 1000 élèves,

- 60% des élèves sont des filles et 40% des garçons.
- Parmi les filles, 10% sont internes et 90% sont externes.
- Parmi les garçons, 25% sont internes et 75% sont externes.

Cette situation peut-être représenté par le schéma ci-contre appelé **arbre pondéré** :



Règles:
- *La somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nIJud est égale à 1.*
- *La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.*

On obtient à partir de cette arbre les probabilités suivantes :
- $p(F \cap I) = 0,6 \times 0,1 = 0,06$ et $p(F \cap E) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$
- $p(G \cap I) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$ et $p(G \cap E) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$

3 Formules des probabilités totales

Théorème:
Soit Ω l'ensemble des événements élémentaires d'une expérience aléatoire et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignent des sous-ensembles de Ω tel que :

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- *les A_i sont deux à deux disjoints*

alors la probabilité d'un événement quelconque B est donnée par :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdot + p(B \cap A_n)$$

Remarques:

- *On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de de Ω si :*
  $\rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
  $\rightarrow$ *les A_i sont deux à deux disjoints*
- *Si $p(A_i) \neq 0$ pour tout i alors la formule des probabilités totales s'écrit :*

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \times p_{A_i}(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \cdot + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

Exemple:
Dans l'exemple du 2., G et F forment une partition de Ω donc

$$p(I) = p(I \cap G) + p(I \cap F) = 0,1 + 0,06 = 0,16$$

4 Indépendance de deux événements

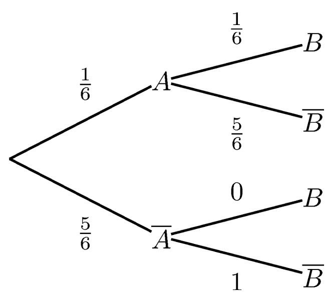
Définition:
Deux événements A et B sont indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Exemple:
On jette successivement deux dés équilibrés.
Notons A l'évènement "le premier dé donne 6" et B l'évènement "la somme des points obtenus lors des deux lancers est égale à 12".

Ces événements sont-ils indépendants ?

On peut représenter la situation suivante par un arbre pondéré :



On en déduit que :

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

De plus :

$$p(A) = \frac{1}{6} \qquad \textit{et} \qquad p(B) = \frac{1}{36} \qquad \textit{donc} \qquad p(A) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$$

D'où :

$$p(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216} = p(A) \times p(B)$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

5 Modélisation d'expériences indépendantes

Une urne contient huit boules numérotées de 1 à 8 dont trois sont blanches et cinq sont noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

- on tire au hasard une boule dans l'urne et on note le chiffre qu'elle porte puis on repose cette boule dans l'urne ;
- on tire de nouveau au hasard une boule dans l'urne et on note sa couleur puis on repose cette boule dans l'urne.

On souhaite connaître la probabilité de l'événement suivant :

E "on obtient un chiffre pair puis on obtient une boule noire"

Comme le tirage s'effectue avec remise, les événements P "on obtient un chiffre pair" et N "on obtient une boule noire" sont indépendants et on a :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(P) \times p(N) \\ p(E) &= \tfrac{4}{8} \times \tfrac{5}{8} \\ p(E) &= \tfrac{5}{16} \end{aligned}$$

Propriété:
On conviendra que pour des expériences aléatoires indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.