Chapitre 6: Primitives

1 Notion de primitive

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Remarque:
Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Théorème: (admis)
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Exemple:
$f : x \mapsto 4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left(2x^2\right)' = 4x$ donc la fonction $F : x \mapsto 2x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 4x$

2 Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème:
f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- *La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.*

Démonstration:

- *$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ donc la fonction G est dérivable sur I et $G'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I.*
- *Soit G une autre primitive de f, alors $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I, elle est donc constante sur I. Il existe un réel c tel que sur I, $G - F = c$ soit $G = F + c$.*

Théorème:
f est une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et c un nombre réel.
Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.

Exemple:
Déterminons la primitive de $f : x \mapsto 4x$ telle que $F(2) = 9$.
$f : x \mapsto 4x$ admet comme primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions de la forme $F : x \mapsto 2x^2 + c$ où c est un réel.

$$\begin{aligned} F(2) = 9 &\iff 2 \times 2^2 + c = 9 \\ &\iff 8 + c = 9 \\ &\iff c = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : *$F : x \mapsto 2x^2 + 1$ est l'unique primitive de $f : x \mapsto 4x$ telle que $F(2) = 9$.*

3 Détermination de primitives

A) Primitives usuelles

Dans le tableau ci-dessous c désigne un réel quelconque.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Primitives définies par $F(x) = \dots$	sur $I = \dots$
k (constante)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
x^n où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour} \quad n \geq 0 \\ ]-\infty; 0[\, \textit{ou}\,]0; +\infty[& \textit{pour} \quad n \leq -2 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$

Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I.

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Primitives définies par $F(x) = \dots$	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$u' \cdot u^n$ où $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$	pour $n \leq -2$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ pour tout x de I

B) Primitives de $f + g$ et kf avec k réel

Propriété:

- *F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I.*

Exemples:

- *$x :\longmapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x :\longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et $x :\longmapsto 3x$ est une primitive de $x :\longmapsto 3$ sur $\mathbb{R}$ donc $x :\longmapsto \frac{x^2}{2} + 3x$ est une primitive de $x :\longmapsto x + 3$ sur $\mathbb{R}$*
- *$x :\longmapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x :\longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ donc $x :\longmapsto 4x^2$ est une primitive de $x :\longmapsto 8x$ sur $\mathbb{R}$*

4 Notion d'intégrale

A) Définition d'une intégrale

Définition:
Si F est une primitive de f sur I et a et b deux réels de I, on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

On le lit : "intégrale de a à b de $f(t)dt$".

Remarques:
- *$F(b) - F(a)$ est noté aussi $[F(t)]_a^b$*
- *Dans la notation $\int_a^b f(t)dt$, la lettre t peut-être remplacée par n'importe quelle autre lettre à l'exception de a, b et f :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

Exemple:
$F : x \mapsto 2x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 4x$ donc :

$$\int_0^3 4tdt = [2t^2]_0^3 = 2 \times 2^2 - 2 \times 0^2 = 8$$

B) Propriétés

Propriété:

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

Démonstration:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$$

Propriété:

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Démonstration:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)dt$$

C) Lien entre intégrale et primitive

Théorème:
La fonction

$$G : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a.

Démonstration:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I et $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est bien une primitive de f qui s'annule en a puisque $G(a) = F(a) - F(a) = 0$.